第25卷第5期　　华 东 交 通 大 学 学 报　　Vol. 25　No. 5
2008年10月　　Journal of East China Jiaotong University　　Oct. ,2008

文章编号: 1005－0523(2008)05－0084－04

关于图的两类边控制数

赵金凤,徐保根,赵　华,帅春萍

(华东交通大学 基础科学学院 江西 南昌 330013)

摘要: 引入了图的反符号边全控制的概念. 设 $G=(V,E)$ 是一个图,$N(e)$ 表示 G 中与 e 相邻的边集,函数 $f: E\rightarrow\{+1,-1\}$,如果对任意 $e\in E(G)$ 均有 $\sum f(e')\leq 0$,其中 $e'\in N(e)$,则称 f 为图 G 的一个反符号边全控制函数. 而 $\overline{\gamma}'_{st}(G)=\max\{\sum f(e)\mid f$ 为 G 的反符号边全控制函数,$e\in E(G)$ 称为图 G 的反符号边全控制数. 分别给出了图的反符号边全控制数和 k 符号边控制数的一个界限,并确定了轮图的反符号边全控制数和完全偶图 $K_{m,n}$ 的 k－符号边控制数的下界.

关　键　词: 反符号边全控制函数; 反符号边全控制数; k 符号边控制函数; k 符号边控制数

中图分类号: O157.5　　　　**文献标识码:** A

本文所指的图均为无向图,文中未说明的术语和符号同于文献[1].

设 $G=(V,E)$ 为一个图,其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$,对于任意 $u\in V(G)$,$N_G(u)$ 表示 u 点在 G 中的邻域,$N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ 表示 u 点在 G 中的闭邻域,$\delta=\delta(G)$ 和 $\Delta=\Delta(G)$ 分别表示图 G 的最小度和最大度. 若 $e=uv\in E(G)$,则 $N_G(e)$ 表示 G 中与 e 相邻的边集,称为 e 在 G 中的边邻域,$N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$ 为 e 在 G 中的闭边邻域. 我们把 $N_G(e)$ 中的边数记为边 e 的边度,即 $\deg_G(e)=|N_G(e)|$. 在不混淆的情况下,$N_G(u)$,$N_G[u]$,$d_G(u)$,$N_G[e]$,$\deg_G(e)$ 分别简记为 $N(u)$,$N[u]$,$d(u)$,$N[e]$,$\deg(e)$.

近些年来,图的控制理论研究的内容越来越丰富,加拿大著名图论专家 E. J. Cockayne[2] 等人先后引入图的许多不同类型的控制概念及其变化形式. 1998 年美国图论学者 W. T. Haynes 等人出版了两部专著[3,4],较为系统地综述了近期的一些主要研究成果. 然而值得注意的是: 几乎所有的概念和结果都是针对图的点控制而言的,很少涉及图的边控制问题. 为了更进一步丰富和完善图的控制理论内容,我们已将点控制概念转向边控制问题,并获得了初步的研究成果,如符号边控制[5,6]、符号星控制[6,7]等. 文[8]和文[9]中分别引入了图的 k－符号边控制和反符号边控制的概念,文[10]中引入了图的符号边全控制的概念,定义如下:

定义1[8]　设 $G=(V,E)$ 为一个边数为 m 的图,k 为一个整数($1\leq k\leq m$),一个双值函数 $f: E\rightarrow\{+1,-1\}$ 如果满足条件: E 中至少有 k 条边 e 使得 $f[e]\geq 1$ 成立,则称 f 为图 G 的一个 k－符号边控制函数,图 G 的 k－符号边控制数定义为

$$\gamma'_{ks}(G)=\min\{f(E)\mid f \text{为图} G \text{的符号控制函数}\}.$$

特别地,当 $k=|E(G)|$ 时,k－符号边控制函数称为符号边控制函数,并且此时 k－符号边控制数称为符号边控制数.

定义2[9]　设 $G=(V,E)$ 是一个图,函数 $f: E\rightarrow\{+1,-1\}$,如果对任意 $e\in E(G)$ 均有 $\sum_{e'\in N[e]} f(e')\leq 0$,则称 f 为 G 的一个反符号边控制函数. 图 G 的反符号边控制数定义为 $\overline{\gamma}'_s(G)=\max\{\sum_{e\in E} f(e)\mid f$ 为 G 的反符号边控制函数$\}$.

收稿日期: 2008－06－19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10661007); 江西省自然科学基金资助项目(2007GZS0715)

作者简介: 赵金凤(1982－),女,河北保定人,运筹学与控制论硕士研究生.

定义 3[10]　设 $G=(V,E)$ 是一个 n 阶连通图($n\geqslant 3$),函数 $f:E\to\{+1,-1\}$ 被称为 G 的一个符号边全控制函数,如果对任意 $e\in E(G)$ 均有 $\sum_{e'\in N(e)}f(e')\geqslant 1$ 成立. 图 G 的符号边全控制数定义为 $\gamma'_{st}(G)=\min\{\sum_{e\in E(G)}f(e)\mid f$ 为 G 的符号边全控制函数$\}$.

下面我们引入图的反符号边全控制的概念.

定义 4　设 $G=(V,E)$ 是一个图,函数 $f:E\to\{+1,-1\}$,如果对任意 $e\in E(G)$ 均有 $\sum_{e'\in N(e)}f(e')\leqslant 0$,则称 f 为 G 的一个反符号边全控制函数. 图 G 的反符号边全控制数定义为 $\bar{\gamma}'_{st}(G)=\max\{\sum_{e\in E(G)}f(e)\mid f$ 为 G 的反符号边全控制函数$\}$.

对于空图 $\bar{K}_n$,定义 $\bar{\gamma}'_{st}(G)=0$. 由上述定义知 $\bar{\gamma}'_{st}(G)\geqslant -|E(G)|$. 又由上述定义不难看出如下两个性质:

性质 1　对任意图 G,均有 $\bar{\gamma}'_{st}(G)\equiv|E(G)|(\mathrm{mod}\ 2)$.

性质 2　对任意两个不交的图 G_1 和 G_2,有 $\bar{\gamma}'_{st}(G_1\cup G_2)=\bar{\gamma}'_{st}(G_1)+\bar{\gamma}'_{st}(G_2)$.

在本文中,我们分别给出了图的反符号边全控制数和 $k-$符号边控制数的一个界限,并确定了轮图的反符号边全控制数和完全偶图 $K_{m,n}$ 的 $k-$符号边控制数的下界.

1　反符号边全控制数的界限

本节我们给出图的反符号边全控制数的一个上界.

定理 1　对于任意 n 阶图 G,均有 $\bar{\gamma}'_{st}(G)\leqslant\frac{(\Delta-\delta)n\Delta}{2(\Delta-1)}$,其中 Δ 和 δ 分别为图 G 的最大度和最小度.

证明　设 f 为图 G 的一个反符号边全控制函数,且使得 $\bar{\gamma}'_{st}(G)=f(E)$.

令 $A=\{e\in E(G)\mid f(e)=1\}$,$B=\{e\in E(G)\mid f(e)=-1\}$,则 $\bar{\gamma}'_{st}(G)=|A|-|B|$. 定义 G 的两个生成子图 G_1 和 G_2 如下

$$V(G_1)=V(G_2)=V(G),E(G_1)=A,E(G_2)=B.$$

对于每一个定点 $u\in V(G)$,定义 u 点的度差 $d^*(u)=d_{G1}(u)-d_{G2}(u)$,显然,$\bar{\gamma}'_{st}(G)=|E(G_1)|-|E(G_2)|=(1/2)\sum_{u\in V(G)}d^*(u)$,即有

$$\sum_{u\in V(G)}d^*(u)=2\bar{\gamma}'_{st}(G).\tag{1}$$

对任意 $e=uv\in E(G)$,由定义 2 知 $f(N(e))=\sum_{e'\in N(e)}f(e')\leqslant 0$,又注意到点度差的定义,即有 $d^*(u)+d^*(v)-2f(uv)\leqslant 0$,从而有 $\sum_{uv\in E(G)}(d^*(u)+d^*(v)-2f(uv))\leqslant 0$,即有

$$\sum_{u\in V(G)}d_G(u)d^*(u)-2\bar{\gamma}'_{st}(G)\leqslant 0\tag{2}$$

由(2)知 $\sum_{u\in V(G)}d_G(u)d^*(u)\leqslant 2\bar{\gamma}'_{st}(G)$

令 $X=\{u\in V(G)\mid d^*(u)\geqslant 0\}$,$Y=\{u\in V(G)\mid d^*(u)<0\}$

即有　$$\sum_{u\in X}d_G(u)d^*(u)+\sum_{u\in Y}d_G(u)d^*(u)\leqslant 2\bar{\gamma}'_{st}(G)$$

从而　$$\delta\sum_{u\in X}d^*(u)+\Delta\sum_{u\in Y}d^*(u)\leqslant 2\bar{\gamma}'_{st}(G)$$

于是有　$$\Delta\sum_{u\in V(G)}d^*(u)\leqslant 2\bar{\gamma}'_{st}(G)+(\Delta-\delta)\sum_{u\in X}d^*(u)$$

再结合(1)有　$$2(\Delta-1)\bar{\gamma}'_{st}(G)\leqslant(\Delta-\delta)\sum_{u\in X}d^*(u)$$

而 $|d^*(u)|\leqslant\Delta$,$|X|\leqslant n$,故有

$$\bar{\gamma}'_{st}(G)\leqslant\frac{(\Delta-\delta)n\Delta}{2(\Delta-1)}.$$

由上述定理直接可得下面推论:

推论 2　对任意 n 阶正则图 G,$\bar{\gamma}'_{st}(G)\leqslant 0$.

下面考虑一类特殊图的反符号边全控制数.

定理3 对于任意 $n+1$ 阶轮图 $W_{n+1}=C_n+K_1(n\geqslant3)$，均有 $\bar{\gamma}'_{st}(W_{n+1})=0$.

证明 记 $G=W_{n+1}$，$V(W_{n+1})=\{v_0,v_1,\cdots,v_n\}$，其中 v_0 为其中心点，圈 C_n 上的点依次为 $v_1,\cdots,v_n$. 设 f 为 $G=W_{n+1}$ 的反符号边全控制函数且使得 $\bar{\gamma}'_{st}(G)=f(E(G))$. 记 W_{n+1} 中以 v_0 为中心的 $n+1$ 阶星为 S_{n+1}，即 $V(S_{n+1})=V(G)$，$E(S_{n+1})=\{v_0v_i|1\leqslant i\leqslant n\}$，$C_n=W_{n+1}-v_0$. 为了方便，我们记 $f(S_{n+1})=f(E(S_{n+1}))$，$f(C_n)=f(E(C_n))$.

由定义2知，对于每条边 $e\in E(C_n)$，均有 $f(N(e))\leqslant0$. 注意到 $|N(e)|=4$ 为偶数，从而 $f(N(e))\leqslant0$，因此，$\sum_{e\in E(C_n)}f(N(e))\leqslant0$，等价于 $2f(S_{n+1})+2f(C_n)\leqslant0$，而

$$\bar{\gamma}'_{st}(G)=f(S_{n+1})+f(C_n)\text{，故 }\bar{\gamma}'_{st}(G)\leqslant0 \tag{3}$$

定义一个函数 $f:E(W_{n+1})\to\{+1,-1\}$ 如下

$$f=\begin{cases}+1\text{，当 }e\in E(C_n)\text{ 时}\\-1\text{，当 }e\in E(S_{n+1})\text{ 时}\end{cases}$$

不难验证 f 为 $G=W_{n+1}$ 的反符号边全控制函数，且 $f(E(W_{n+1}))=0$，从而有

$$\bar{\gamma}'_{st}(G)\geqslant0 \tag{4}$$

结合(3)(4)两式可知 $\bar{\gamma}'_{st}(G)=0$. 证毕.

2 k 符号边控制数的界限

定理4 对于任意边数为 m 的图 G，若其边度序列为 $d'_1\leqslant d'_2\leqslant\cdots\leqslant d'_m$，则有

$$\gamma'_{ks}(G)\geqslant-m+\frac{2}{d'_m+1}\sum_{j=1}^{K}\frac{d'_j+2}{2}.$$

证明 设 g 为图 $G=(V,E)$ 的一个最小 $k-$ 符号边控制函数，由定义知，存在 k 条不同的边 $e\in\{e_{j1},e_{j2},\cdots,e_{jk}\}$，使得 $g(N_G[e])\geqslant1$ 成立.

对任意 $e\in E(G)$，令 $f(e)=\dfrac{g(e)+1}{2}$，f 为一个 $0-1$ 函数，且有

$$\sum_{i=1}^{k}f(N_G[e_{ji}])=\sum_{i=1}^{k}\lceil(g(N_G[e_{ji}])+d'_{ji}+1)/2\rfloor\geqslant\sum_{i=1}^{k}\lceil(d'_{ji}+2)/2\rfloor\geqslant\sum_{i=1}^{k}\lceil(d'_j+2)/2\rfloor$$

另一方面，由于

$$\sum_{i=1}^{k}f(N_G[e_{ji}])\leqslant\sum_{j=1}^{m}f(N_G[e_j])=\sum_{i=1}^{m}(d'+1)f(e_i)\leqslant(d'_m+1)f(E),$$

因此有

$$f(E)\geqslant\frac{1}{d'_m+1}\sum_{i=1}^{k}\lceil(d'_j+2)/2\rfloor,$$

从而得到 $\gamma'_{ks}(G)=g(E)=2f(E)-m\geqslant-m+2/(d'_m+1)\sum_{i=1}^{k}\lceil(d'_j+2/2)\rfloor$. 证毕.

由上述定理，可直接得出下面的推论.

推论5 设有正整数 m,n 和 $k(1\leqslant k\leqslant m+n-2)$，则对任意完全偶图 $K_{m,n}$，均有

$$\gamma'_{ks}(K_{m,n})\geqslant\begin{cases}k\dfrac{m+n+1}{m+n-1}-mn\text{，当 }m,n\text{ 之一为奇数时}\\[2ex]k\dfrac{m+n}{m+n-1}-mn\text{，当 }m,n\text{ 均为奇数或偶数时}\end{cases}$$

证明由于完全偶图 $K_{m,n}$ 每条边的度数均为 $m+n-2$，即对任意边 $e\in E(K_{m,n})$ 有 $\deg(e)=m+n-2$，故由上述定理可直接得出.

参考文献:

[1] Bondy J A and Murty V S R. Graph Theory with Applications [M]. Amsterdam: Elsevier, 1976.

[2] Haynes T W, Hedetniemi S T and Slater P J. Domination in Graphs [M]. New York: Marcel Dekker, 1998.

[3] Zhang Z, Xu Baogen, Li Y and Liu L. A note on the lower bounds of signed domination number of a graph [J]. Discrete Math,

1999,195: 295 – 298.

[4] Xu Baogen,Cockayne E J,Haynes T W,Hedetniemi S T and Zhou S. Extremal graphs for inequalities involving domination parameters [J]. Discrete Math,2000,216: 1 – 10.

[5] Xu Baogen. On minus domination and signed domination in graphs [J]. 数学研究与评论,2003,23(4): 586 – 590.

[6] Cockayne E J and Mynhart C M. On a generalization of signed domination functions of graphs [J]. Ars. Combin,1996,43: 235 – 245.

[7] Xu Baogen. On signed edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Math,2001,239: 179 – 189.

[8] 徐保根. 图的控制理论 [M]. 北京: 科学出版社,2008.

[9] 徐保根. 关于图的反符号边控制 [J]. 华东交通大学学报,2007,24(5): 144 – 147.

[10] 徐保根. 关于图的符号边全控制 [J]. 华东交通大学学报,2006,23(2): 129 – 131.

On Two Classes of Edge Domination Numbers of Graphs

ZHAO Jin – feng,XU Bao – gen,ZHAO Hua,SHUAI Chun – ping

(School of Basic Sciences,East China Jiaotong University,Nanchang 330013,China)

Abstract: The concept of reverse signed edge total domination in graphs is introduced. Let G = (V,E) be a graph,N(e) is the neighbors of e in G. A function f: E→{+1,–1} is said to be a reverse signed edge total dominating function (RSETDF) of G if $\sum f(e') \leqslant 0$ holds for every edge $e \in E(G)$,where $e' \in N(e)$ and $\overline{\gamma}'_{st}(G) = \max\{\sum f(e) \mid f$ is a RSETDF of G,$e \in E\}$is called the reverse signed edge total domination number of G. A bound of $\overline{\gamma}'_{st}(G)$ and a bound of $\gamma'_{ks}(G)$ for general graphsare obtained respectively,and the exact value of $\overline{\gamma}'_{st}(G)$ for wheel graph and the lower bound for $K_{m,n}$ are determined.

Key words: reverse signed edge total dominating function; reverse signed edge total domination number; k – signed edge dominating function; k – signed edge domination number

(责任编辑: 周尚超)