

超静定 Γ 型刚架的置换原理解答

喻晓今

(华东交通大学 土木建筑学院 江西 南昌 330013)

摘要: 介绍多种梁的挠曲线与其置换梁的挠曲线的关系研究, 给出了求解各梁位移的置换法转角方程和置换原理中的转角连续性关系。鉴于对 Γ 型刚架的求解中稀有几类方法的情况, 运用所述的置换法和置换原理, 把解梁问题的手段应用于该型刚架的解算。策划、归纳了求该型超静定刚架不同约束类型时的步骤。具体求解过程所用的计算为代数方程的分式四则运算, 方法较通俗简便。结果是解析解。

关键词: 置换法; 比拟; 位移; 内力; Γ 型刚架

中图分类号: TU328; TU323.5

文献标识码: A

计算刚架大多使用能量原理类方法。另一些方法在探索中, 文[1]给出了简支梁的比拟梁法; 文[2]推导出梁转角连续性关系; 文[3]以置换法解超静定连续梁; 文[4]又以置换法结合分段刚化的方式对含有固定端的小型刚架进行了求解, 但未解决无固定端时的问题。总之, 前文已经提出了利用悬臂梁的自由端的位移与荷载、杆长、抗弯刚度等量的关系, 导出求解各种梁位移及反力的方法, 即比拟的方法或置换的方法。下面将置换法的转角方程和转角连续性关系应用于 Γ 型刚架的求解, 即以置换原理解此刚架。

1 置换原理解 Γ 型刚架思想

上述论文里考察了悬臂梁挠曲线与简支梁、外伸梁等的挠曲线的关系, 其要点是将任何一段直梁的弹性曲线用悬臂梁的挠曲线比拟、置换而得到, 推导出置换法求任意直梁的转角方程。在图1的情形下, (a) 所示为左置换梁, (b) 是右置换梁。

可得以此两置换用之左右悬臂梁自由端挠度和杆长为变量的转角方程^[1]

$$\theta = (w_l - w_r) / l \quad (1)$$

其中 θ 是所求 C 截面的转角; w_l, w_r 分别表示左、右置换梁自由端挠度, 其是原梁 AB 的荷载和反力等等的函数, 位移方向与 y 轴一致者为正; l 为原梁 AB 长度。上式的正负号已适配。

文[2]得出转角连续性关系

$$\theta = \theta_A - \theta_Z \quad (2)$$

其中 θ_A 是梁两任意截面之转角, θ_Z 是 AC 段比拟或置换梁自由端转角。

将置换原理应用于 Γ 型刚架求解的策划和步骤: (1) 刚架静力分析, 观察其构造、其静定超静定性、超

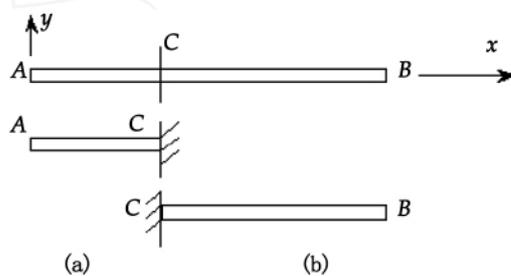


图1 任一段梁及其左置换梁、右置换梁

收稿日期: 2008-08-20

基金项目: 华东交通大学科研基金(06ZKTM05)

作者简介: 喻晓今(1959-), 男, 江西南昌人, 教授, 工学硕士, 从事各种结构、构(零)件的力学性能研究。

静定次数; (2) 判断各部分有否侧移; (3) 列写静力平衡方程; (4) 以刚结点为界, 分两支研究; (5) 取有固定端的一支, 依置换法转角连续性关系列出刚结点处转角; (6) 取无横向侧移一支研究, 置换梁固定端设于刚结点处, 依置换法转角方程算出刚结点处转角; (7) 按转角惟一性条件确定出补充方程; (8) 补充方程与静力平衡方程联立求解, 得出各支反力, 进而可解刚架内力、位移等。

注意事项: (1) 研究对象为杆状刚架, 忽略轴向变形; (2) 采用直角坐标, 根据转角按转向定正负的定义, 坐标整体转动, 无碍转角正负符号的相对性和在具体坐标下的绝对性; (3) 在遇有固定端杆段时, 一般套用转角连续性关系; 其它情况多用转角方程。

2 算例

三个算例可以显示置换原理解法的特点。

2.1 有侧移 I 刚架

文[5]有题: 求反力和结点 B 处弯矩, 见图 2。

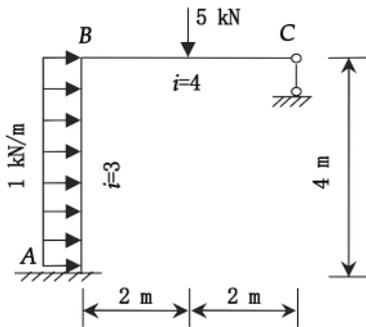


图2 2种荷载刚架

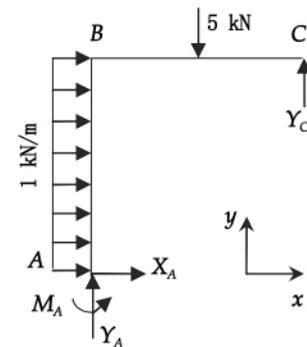


图3 2种荷载刚架受力图

(1) 判断 1 次超静定, AB 有侧移。

(2) 受力分析 见图 3, 平衡方程如下

$$X_A = -4 \text{ (单位省略, 下同)}$$

$$Y_A + Y_C = 5 \tag{3}$$

$$M_A + 4Y_C = 18 \tag{4}$$

(3) 研究 AB 截出 AB 如图 4。

按置换原理得截面 A 相对于截面 B 的转角 $\theta_{AB} = \frac{M_A 4}{12} + \frac{X_A 4^2}{2 \times 12} + \frac{1 \times 4^3}{6 \times 12} = 0.333M_A - 1.778$

由转角正负号定义, 继有 $\theta_{BA} = -\theta_{AB} = -0.333M_A + 1.778$

又依文[2], 按转角连续性条件由式(2)得 $\theta_B = \theta_A + \theta_{BA}$

因为 A 是固定端, 故 $\theta_A = 0$, 则 $\theta_B = -0.333M_A + 1.778$

$$\tag{5}$$

(4) 研究 BC 见图 5, 其无侧移。

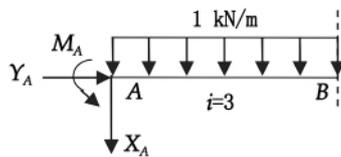


图4 AB段

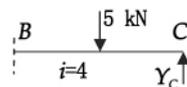


图5 BC段

以结点 B 为置换梁的固定端, 左置换梁有

$$w_l = 0$$

右置换梁有

$$w_r = -\frac{5 \times 2^3}{3(4 \times 4)} - \frac{5 \times 2^2}{2(4 \times 4)} \times 2 + \frac{Y_C 4^3}{3(4 \times 4)} = -2.083 + 1.333Y_C$$

由式(1), 有

$$\theta_B = \frac{1}{4}(2.083 - 1.333Y_C) = 0.521 - 0.333Y_C \quad (6)$$

(5) 转角惟一性条件 结合式(5)、(6), 有

$$-0.333M_A + 1.778 = 0.521 - 0.333Y_C, M_A = 3.778 + Y_C \quad (7)$$

(6) 联立方程求解 由式(3)、(4)、(7), 可得

$Y_A = 2.156 \text{ kN}$, $M_A = 6.622 \text{ kNm}$, $Y_C = 2.844 \text{ kN}$, $M_{BC} = 1.377 \text{ kNm}$, 下边受拉.

2.2 无侧移 Γ 刚架

文[6]给出的题如图 6, 求此刚架的反力、结点 C 处弯矩.

(1) 受力分析 整体受力见图 7, 一次超静定. 无侧移.

平衡方程有(省略单位)

$$X_A + X_B = 12 \quad (8)$$

$$Y_A + Y_B = 0 \quad (9)$$

$$X_B + Y_B = 6 \quad (10)$$

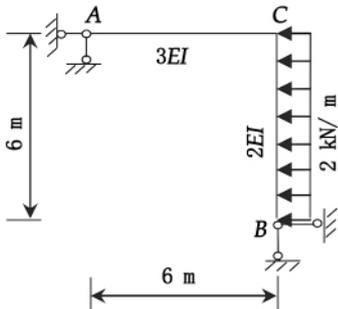


图 6 一种荷载刚架

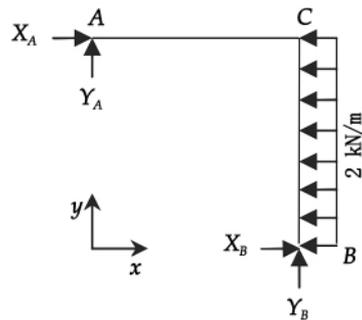


图 7 一种荷载刚架受力图

(2) 研究 AC 截出 AC, 见图 8.

将置换梁的固定端设于结点 C 处, 则左置换梁有

$$w_l = \frac{Y_A 6^3}{3(3EI)} = \frac{24}{EI} Y_A$$

右置换梁有 $w_r = 0$.

由式(1) 得结点 C 的转角

$$\theta_c = \frac{1}{6} \left(\frac{24}{EI} Y_A \right) = \frac{4}{EI} Y_A \quad (11)$$

(3) 研究 CB C 处设置换梁固定端, 见图 9.

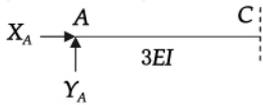


图 8 AC 段

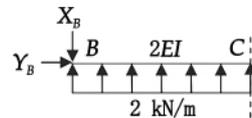


图 9 BC 段

左置换梁有

$$w_l = -\frac{X_B 6^3}{3(2EI)} + \frac{2 \times 6^4}{8(2EI)} = -\frac{36}{EI} X_B + \frac{162}{EI}$$

右置换梁有 $w_r = 0$.

由式(1) 得结点 C 转角

$$\theta_c = \frac{1}{6} \left(-\frac{36}{EI} X_B + \frac{162}{EI} \right) = -\frac{6}{EI} X_B + \frac{27}{EI} \quad (12)$$

(4) 转角惟一性条件 结合式(11)、(12) 得

$$\frac{4}{EI} Y_A = -\frac{6}{EI} X_B + \frac{27}{EI}, \quad 4Y_A + 6X_B = 27 \quad (13)$$

(5) 联立求解 由式(8)、(9)、(10)、(13) 有4元方程组增广矩阵, 反力按 X_A, Y_A, X_B, Y_B 顺序排列如下

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

解得反力为

$$X_A = 6.9 \text{ kN}, Y_A = -0.9 \text{ kN}, X_B = 5.1 \text{ kN}, Y_B = 0.9 \text{ kN}.$$

继而算得 C 结点处弯矩 $M_{CA} = 5.4 \text{ kNm}$, 上边受拉.

2.3 超静定多次 Γ 刚架

文[7]题如图10, 求 B 处弯矩.

(1) 整体受力见图11, 为二次超静定, 无侧移.

静力分析:

$$X_A + X_C = 0 \quad (14)$$

$$Y_A + Y_C = 120 \quad (15)$$

$$M_A - 4X_C + 6Y_C = 360 \quad (16)$$

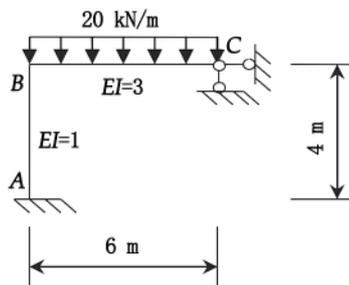


图10 二次超静定刚架

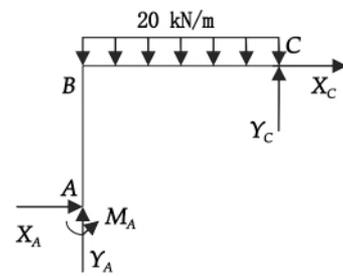


图11 整体受力图

(2) 研究 AB 截出 AB 见图12.

于 B 处设置换梁的固定端, 有

$$w_l = -21.333X_A - 8M_A, \quad w_r = 0, \quad \theta_B = -5.333X_A - 2M_A \quad (17)$$

又依转角连续性关系, 得

$$\theta_{AB} = 8X_A + 4M_A, \quad \theta_{BA} = -\theta_{AB}, \quad \theta_A = 0, \quad \theta_B = \theta_A + \theta_{BA} \quad \text{故} \quad \theta_B = -8X_A - 4M_A \quad (18)$$

式(18)结合式(17) 得

$$X_A + 0.75M_A = 0 \quad (19)$$

(3) 研究 BC 见图13. 有

$$w_l = 0, \quad w_r = -1080 + 24Y_C, \quad \theta_B = 180 - 4Y_C \quad (20)$$

式(20)结合式(18) 得

$$-X_A - 0.5M_A + 0.5Y_C = 22.5 \quad (21)$$

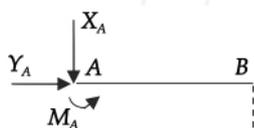


图12 AB段

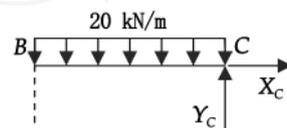


图13 BC段

(4) 联立式(14)、(15)、(16)、(19)、(21) 得

$$Y_C = 54 \text{ kN}, X_C = -13.5 \text{ kN}, X_A = 13.5 \text{ kN}, Y_A = 66 \text{ kN}, M_A = -18 \text{ kNm}$$
$$M_{BA} = -M_A - X_A \cdot 4 = -36 \text{ kNm}.$$

3 结论

置换原理解 Γ 型刚架是在记忆单个荷载下悬臂梁自由端位移的简单结果(一般是6个整数常数)和置换梁转角方程及转角连续性关系的基础上,进行静力平衡方程和变形方程的简单分式的四则运算,而求出多种荷载下 Γ 刚架的反力、内力和位移。所述刚架条件宽松,可无侧移亦可有侧移,可多次超静定,并且得到刚架的解析解。

参考文献:

- [1] 喻晓今. 以比拟梁法求梁的位移[J]. 华东交通大学学报, 2002, 19(4): 35-36.
- [2] 喻晓今. 挠曲线复位的微分方程解法求梁的位移[J]. 华东地质学院学报, 2003, 26(3): 271-273.
- [3] 喻晓今. 求超静定等直梁的置换法[J]. 工程力学, 2007, 24(增刊1): 66-69.
- [4] 喻晓今, 胡淑兰, 梁平英. 用置换法解有固定端的超静定小型刚架系统[J]. 华东交通大学学报, 2008, 25(2): 6-9.
- [5] 于仁财, 刘文顺. 结构力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007. 112-113.
- [6] 黄志平. 结构力学例题与习题集[M]. 北京: 人民交通出版社, 1988. 174.
- [7] 刘玉彬, 白秉三 等. 结构力学(下册)[M]. 北京: 科学出版社, 2004. 429.

Solution of Statically Indeterminate Frame with Shape Γ Based on Principle of Conversion

YU Xiao_jin

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The research works on the relationship between the deflection curves of various kinds of beams and cantilever beam. It presents the equation of slope rotation angle by the conversion method and the continuity relationship of slope rotation angles by the principle of conversion. Owing to lack of geometric method for calculating frames with shape Γ , the conversion method used to calculate the beams and the principle of conversion are employed to resolve the frames now. It puts forward the analyzing steps of the solution of statically indeterminate frame with shape Γ by the conversion method and the principle of conversion. Different types of constraint are considered. The concrete process of calculation belongs to primary computation of algebraic equation. Easy to understand, it gets analytic solution.

Key words: conversion method; analogy; displacement; internal force; frame with shape Γ

(责任编辑:王全金)