

电磁波在不同媒质的传输矩阵理论

伍清萍, 刘正方

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 运用电动力学理论详细地推导了电磁波在正、负折射率媒质界面的传输矩阵, 以及电磁波在正折射率媒质内部和负折射率媒质内部的传输矩阵, 并在此基础上对不同模型的光子晶体的透射系数进行了模拟, 此研究为进一步研究电磁波的传输特性提供了一定的依据。

关键词: 负折射率媒质; 传输矩阵; fibonacci; thue_morse

中图分类号: O43

文献标识码: A

介电常数 ε 和磁导率 μ 是描述均匀媒质中电磁场性质的最基本的两个物理量。对于一般电介质而言, 介电常数 ε 和磁导率 μ 都是非负的常数。由麦克斯韦方程可知, 在 ε 和 μ 都为正值的物质中, 电场、磁场和波矢三者构成右手关系, 我们称这样的物质为右手性介质。1968年, 前苏联物理学家 Veselago^[1] 在理论上研究了介电常数 ε 和磁导率 μ 都为负值的物质的电磁学性质, 他发现与常规材料右手性介质 (RHM) 不同的是: 当 ε 和 μ 都为负值时, 电场、磁场和波矢之间构成左手关系, 他称这种假想的物质为左手性介质 (LHM)。他还指出, 左手性介质中电磁波的行为与在右手性介质中有很大的不同, 比如光的负折射, 负的切连科夫效应, 反多普勒效应, 平板聚焦, 凹透镜汇聚等奇异现象等等。2001年, 加州大学 San Diego 分校 Smith^[2] 等物理学家根据 Pendry 等人的建议, 利用以铜为主的复合材料首次制造出在微波波段具有负介电常数、负磁导率的物质^[2-4]。因此人们才对这种材料无论从理论还是实验投入了更多的兴趣。那么对于有负折射率媒质存在的物质的传输性质自然也成为了研究的主题之一。而传输矩阵方法是研究传输性质的主要方法之一。电磁波在正折射率媒质的传输矩阵理论已有严格证明, 但在现今出现的负折射率媒质的传输矩阵理论通常只有一通式代入, 没有具体的推导。基于此, 本文对负折射率媒质的具体传输矩阵理论进行了细致地推导。

1 理论推导

本文以两层媒质 A、B 为例, 首先设光在 A、B 层媒质中的电场分别记为:

$$E_A = \exp [i(K_A x \sin \delta_A - \omega t)] [A_1 \exp(-iK_A y \cos \delta_A) + B_1 \exp(iK_A y \cos \delta_A)] \quad (1)$$

$$E_B = \exp [i(K_B x \sin \delta_B - \omega t)] [A_2 \exp(iK_B y \cos \delta_B) + B_2 \exp(-iK_B y \cos \delta_B)] \quad (2)$$

其中 K_A 、 K_B 分别为 A、B 层媒质中的波矢, 且设 A 层媒质为负折射率媒质, 即有 $\varepsilon_A < 0$, $\mu_A < 0$, 而 B 层媒质为正折射率媒质即有 $\varepsilon_B > 0$, $\mu_B > 0$, ω 为光的角频率, δ_A , δ_B 为入射角。

由电动力学理论以图 1 为例可知, 若设

$$E_{A1} = \exp [-i(K_A x \sin \delta_A - \omega t)] A_1 \quad (3)$$

收稿日期: 2008-06-23

基金项目: 华东交通大学校内基金资助项目 (01307142)

作者简介: 伍清萍 (1978-), 女, 湖南黔阳人, 硕士, 讲师, 主要研究方向为波导光学。

$$E_{A2} = \exp [i(K_A x \sin \delta_A - \omega \tau)] B_1 \tag{4}$$

$$E_{B1} = \exp [i(K_B x \sin \delta_B - \omega \tau)] A_2 \tag{5}$$

$$E_{B2} = \exp [-i(K_B x \sin \delta_B - \omega \tau)] B_2; \tag{6}$$

在边界处 $x=0$ 有

$$E_{A1} + E_{A2} = E_{B1} + E_{B2} \tag{7}$$

$$\frac{-iK_A}{\mu_A} (E_{A1} - E_{A2}) \cos \delta_A = \frac{K_B}{\mu_B} (E_{B1} - E_{B2}) \cos \delta_B \tag{8}$$

为方便计算令

$$E_+ = E_1 + E_2 \quad E_- = -i(E_1 - E_2) \tag{9}$$

则有

$$E_{A+} = E_{A1} + E_{A2} \quad E_{A-} = -i(E_{A1} - E_{A2}) \tag{10}$$

$$E_{B+} = E_{B1} + E_{B2} \quad E_{B-} = -i(E_{B1} - E_{B2}) \tag{11}$$

衔接条件可用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} E_{A+} \\ E_{A-} \end{bmatrix} = M_{AB} \begin{bmatrix} E_{B+} \\ E_{B-} \end{bmatrix} \tag{12}$$

将各式代入可得由 A 层媒质到 B 层媒质界面的转移矩阵为

$$M_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-\mu_A K_B \cos \delta_B}{\mu_B K_A \cos \delta_A} \end{bmatrix} \tag{13}$$

同理可得由 B 层媒质到 A 层媒质界面的转移矩阵

$$M_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-\mu_B K_A \cos \delta_A}{\mu_A K_B \cos \delta_B} \end{bmatrix} \tag{14}$$

当光在如图 2 所示的同种正折射率媒质 B 中时,若传播的垂直距离为 d_B 时,则透射光和反射光的电场分别为

$$E_{B1}' = E_{B1} \exp(i \kappa n_B d_B \cos \delta_B) \tag{15}$$

$$E_{B2}' = E_{B2} \exp(i \kappa n_B d_B \cos \delta_B) \tag{16}$$

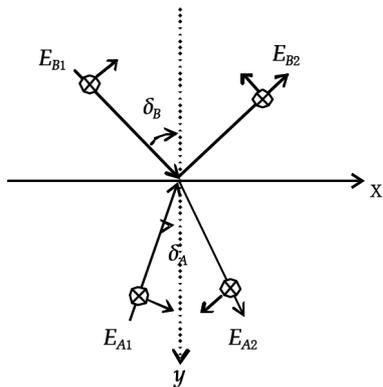


图 1 电磁波在 AB 界面的传播

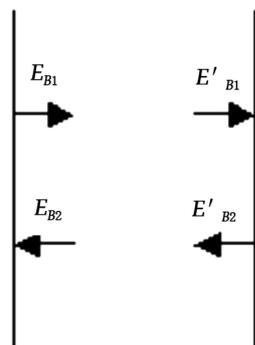


图 2 电磁波在 B 层媒质中传播时电场强度分布图

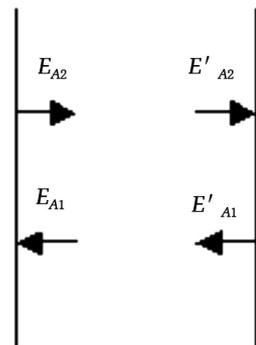


图 3 电磁波在 A 层媒质中传播时电场强度分布图

由电动力学理论同理可求出光在 B 层同种媒质中的转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} E_{B1+}' \\ E_{B2-}' \end{bmatrix} = M_B \begin{bmatrix} E_{B1+} \\ E_{B2-} \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中

$$M_B = \begin{bmatrix} \cos\theta_B & -\sin\theta_B \\ \sin\theta_B & \cos\theta_B \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中 $\theta_B = i\kappa n_B d_B \cos\delta_B$

当光在如图 3 所示的同种负折射率媒质中时,若传播的垂直距离为 d_A 时,则透射光和反射光的电场分别为

$$\begin{aligned} E_{A1}' &= E_{A1} \exp(-i\kappa n_A d_A \cos\delta_A) \\ E_{A2}' &= E_{A2} \exp(i\kappa n_A d_A \cos\delta_A) \end{aligned} \quad (19)$$

由电动力学理论同理可求出光在 A 同种媒质中转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} E_{A1+}' \\ E_{A2-}' \end{bmatrix} = M_A \begin{bmatrix} E_{A1+} \\ E_{A2-} \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中

$$M_A = \begin{bmatrix} \cos\theta_A & \sin\theta_A \\ -\sin\theta_A & \cos\theta_A \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中 $\theta_A = i\kappa n_A d_A \cos\delta_A$

一旦解决了正折射率媒质、负折射率媒质内部的转移矩阵以及边界的转移矩阵,那么许多类型的光学元件的传输矩阵便迎刃而解了,例如光子晶体有周期性结构、fibonacci 结构、thue_morse 结构等等,对于这些结构的多层乃至上千上万层时都可以以上的传输矩阵为基础,例如:

周期性结构:若以 B 媒质为衬底,对于结构为 $B(AB)^N$ 令 $M = M_B M_{BA} M_A M_{AB}$, 则任意 $M_N = M^N M_B$

fibonacci 结构^[5]:若以 B 媒质为衬底,根据 Fibonacci(n) 排列方式为 $S_{j+1} = S_{j-1}^{n-1} S_j$, 其中 $j \geq 1$. 如假设初使条件为 $S_0 = \{B\}$, $S_1 = \{B^{n-1}A\}$, 对于 Fibonacci(n) 超晶格结构传输矩阵 M 则应有下列关系^[6], 第一代 $M_1 = M_B$, 第二代 $M_2 = M_B^{n-1} M_{BA} M_A M_{AB}$, 穿过第 k 代是 $M_k = M_{k-1}^N M_{k-2}$.

thue_morse 结构^[7]:若以 B 媒质为衬底,若 $S_0 = \{B\}$, $S_1 = \{BA\}$, $S_2 = \{BAAB\}$, $S_3 = \{BAABABBA\} \dots$, 则以第四代 16 层为例,令 $M = M_B M_{BA} M_A M_{AB} M_B$, $M^{-1} = M_{AB}^M M_B M_B M_{BA} M_A$, 则传输矩阵 $M_4 = M M_{BA} M^{-1} M_{AB} M M_{BA} M^{-1} M_{AB} M_B$.

传输矩阵是作为研究传输特性的基础,一旦传输矩阵确定,那么诸如透射系数、能带、态密度、色散、成像等特性均可通过数值方法模拟实现,以下图 4~6 以数值模拟的透射系数为例. 其中参数为: $n_A = -2$, $n_B = 3$, $n_A d_A = n_B d_B = \theta$, $\delta_A = \delta_B = 0$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

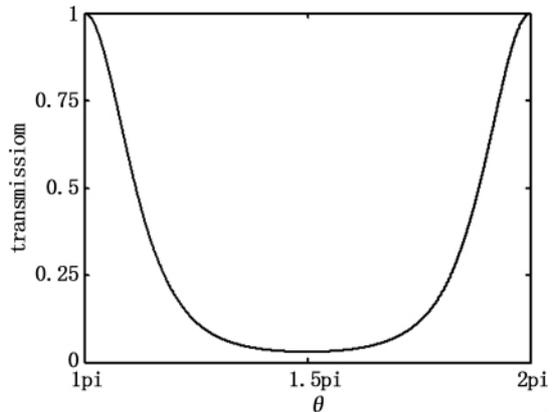


图 4 周期结构 12 层的透射系数

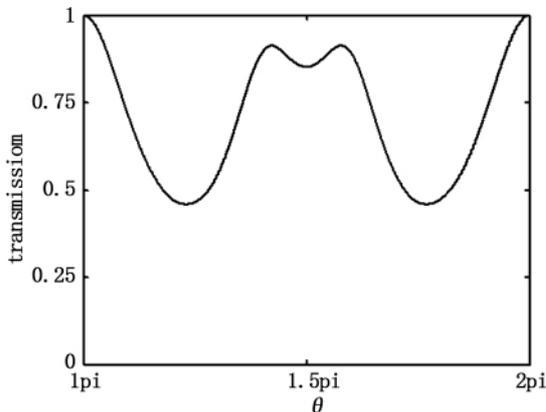


图 5 fibonacci(2) 结构第 4 代 12 层的透射系数

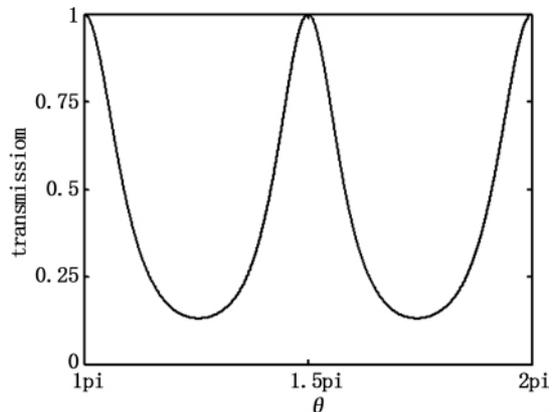


图 6 thue_morse 结构第四代 16 层的透射系数

2 结论

本文运用电动力学理论详细地推导了电磁波在正、负折射率媒质界面的传输矩阵,以及电磁波在正折射率媒质内部和负折射率媒质内部的传输矩阵,并在此基础上对由正、负折射率媒质构成的周期性结构、Fibonacci 结构、Thue_morse 结构的传输矩阵做了进一步了解,并对他们的透射系数作了简单的模拟.此研究为进一步研究电磁波在不同光学元件的传输特性提供了一定的依据.

参考文献:

- [1] Veselago V G ,Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ [J]. Soviet Physics Uspekhi_Ussr. , 1968 ,10 (4) : 509 - 514.
- [2] Smith D R ,Padilla W ,Nier D ,Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity [J]. Phys. Rev Lett. , 2000 ,84 (18) : 4184 - 4187.
- [3] Shelby R A ,Smith D R ,Nemat_Nasser. S. C ,et al. Microwave transmission through a two_dimensional isotropicleft_handed meta-material [J]. Appl. Phys. Lett. 2001 ,78 (4) : 489 - 491.
- [4] Shelby R A ,Smith D R ,Schultz S ,Experimental verification of a negative index of refraction [J]. Science. 2001 ,292 (5514) : 77 - 79.
- [5] Fu Xiujun ,Liu Youyan ,Zhou Peiqin ,et al. Perfects self_similarity of energy spectra and gap_labeling properties in one_dimensional Fibonacci_class quasi_lattices [J]. Phys. Rev ,1997 ,B55 (5 - 1) : 2882 - 2889.
- [6] 杨湘波 ,刘有延 .光在按特殊准晶方式排列的媒质中的传播 [J]. 物理学报 ,1998 ,47 (5) : 851 - 863.
- [7] Liu N H. Propagation of light waves in Thue_Morse dielectric multilayers [J]. Phys Rev B ,1997 ,55 (6) : 3543 - 3547.

The Transfer_matrix Theory of Electromagnetic Wave in Different Materials

WU Qing_ping ,LIU Zheng_fang

(School of Basic Science ,East China Jiaotong University ,Nanchang 330013 ,China)

Abstract: The transfer_matrix theory of electromagnetic wave at the interface between right_handed and left_handed materials and on the respective interior is proved rigidly by using the electrodynamics theory. Then the paper simulates the transmission coefficient of different photonic crystal by using the theory ,which is helpful to future studying the transmission characteristic of electromagnetic wave.

Key words: left_handed material; transfer_matrix; fibonacci; thue_morse

(责任编辑: 王建华)