文章编号:1005-0523(2009)03-0081-04

关于图 $C_{6,i,2n}$ 的优美性

刘二根,蔡克文,武 丹

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:由 $2n$ 个圈 C_6 按顺序一个接一个地粘合在一起,并且粘合的点数为 i,得到的图记为 $C_{6,i,2n}$。本文证明了 $C_{6,1,2n}$,$C_{6,2,2n}$,$C_{6,3,2n}$,都是优美图。

关 键 词:图;优美标号;优美图

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

由若干个圈所构成的图是一类重要而有趣的图,这类图的优美性[1~3]是众多学者研究的对象。文[4]中给出了顺序有一个公共点的 m 个 C_4 的并图是优美图,本文研究三类图 $C_{6,1,2n}$,$C_{6,2,2n}$,$C_{6,3,2n}$ 的优美性。

文中所讨论的图均为无向简单图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集,未说明的符号及术语均同文[4]。

定义1 对于一个图 $G=(V,E)$,如果对每一个 $v\in V$,存在一个非负整数 $\theta(v)$(称为顶点 v 的标号),满足:

(1) $\forall u,v\in V$,若 $u\neq v$,则 $\theta(u)\neq\theta(v)$;

(2) $\max\{\theta(v)\mid v\in V\}=|E|$;

(3) $\forall e_1,e_2\in E$,如果 $e_1\neq e_2$,则 $\theta'(e_1)\neq\theta'(e_2)$,其中 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$,$e=uv$。

则称 G 为优美图,称 θ 为 G 的一个优美值或优美标号,称 θ' 为 G 的边上由 θ 导出的诱导值。

定义2 由 $2n$ 个圈 C_6 按顺序一个接一个地粘合在一起,粘合的顶点数为 i,且从第2个圈到第 $2n-1$ 圈中,粘合点分每个圈得到的两条路(不含两圈粘合的边)距离相等,这样的图记为 $C_{6,i,2n}$。

1 主要结果及其证明

定理1 图 $C_{6,1,2n}$ 是优美图。

证明 如图1所示

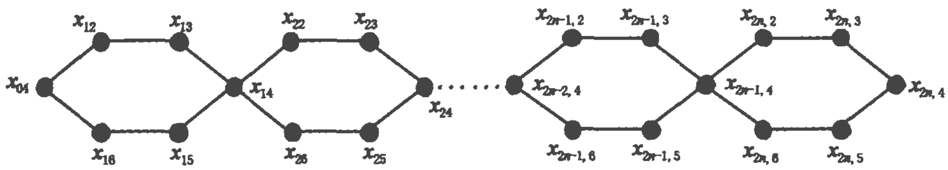

图1 $C_{6,1,2n}$

对图 $C_{6,1,2n}$ 的顶点标号如下:

$\theta(x_{2i-1,2})=6i+6+12(n-i),i=1,2,\cdots,n$;

$\theta(x_{2i,2})=6i-3,i=1,2,\cdots,n$;

$\theta(x_{2i-1,3})=6i-2,i=1,2,\cdots,n$;

收稿日期:2009-04-22

基金项目:江西省自然科学基金(0611009);江西省教育厅科研项目(GJJ08254)

作者简介:刘二根(1965-),男,江西吉水人,教授,主要从事应用数学研究。

$\theta(x_{2i,3}) = 6i + 1 + 12(n - i), i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i-1,4}) = 6i + 4 + 12(n - i), i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i,4}) = 6i, i = 0, i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i-1,5}) = 6i - 5, i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i,5}) = 6i + 2 + 12(n - i), i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i-1,6}) = 6i + 5 + 12(n - i), i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i,6}) = 6i - 1, i = 1,2,\cdots,n$。

下证上面的标号 θ 是 $C_{6,1,2n}$ 的优美标号

(1) 由上面标号容易发现,在 i 相同时,这些标号是不同的且标号式中含 n 的式子的值大于不含 n 的式子的值。当 i 不同时,含 n 标号式子中,$i = k$ 时标号最小值总大于 $i = k + 1$ 时标号最大值;不含 n 标号式中,$i = k$ 时标号最大值总小于 $i = k + 1$ 时标号最小值。因此,各个顶点标号是不同的,且 $|E(C_{6,1,2n})| = 12n = \max(x_{i,j}), x_{i,j} \in V(C_{6,1,2,n})$。

(2)由 θ 导出的边诱导值 θ' 为

$$\theta' : \{|\theta(u) - \theta(v)| \,\big|\, (u,v) = e \in E(C_{6,1,2n})\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i,j}) - \theta(x_{2i,j+1})| \,\big|\, j = 2,3,4,5\} \cup \bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i-1,j}) - \theta(x_{2i-1,j+1})| \,\big|\, j = 2,3,4,5\}$$

$$\cup \bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i-1,2}) - \theta(x_{2i-2,4})|, |\theta(x_{2i-1,6}) - \theta(x_{2i-2,4})|\}$$

$$\cup \bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i,2}) - \theta(x_{2i-1,4})|, |\theta(x_{2i,6}) - \theta(x_{2i-1,4})|\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n}\{4 + 12(n - i), 1 + 12(n - i), 2 + 12(n - i), 3 + 12(n - i)\}$$

$$\cup \bigcup_{i=1}^{n}\{8 + 12(n - i), 6 + 12(n - i), 9 + 12(n - i, 10 + 12(n - i)\}$$

$$\cup \bigcup_{i=1}^{n}\{12 + 12(n - i), 11 + 12(n - i)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n}\{7 + 12(n - i), 5 + 12(n - i)\}$$

$$= \{1,2,3,\cdots,12n - 1, 12n\}$$

从而 θ' 是 $E(C_{6,1,2n})$ 到 $\{1,2,3,\cdots,12n\}$ 的一个一一对应。

因此,由(1),(2)知 θ 是 $C_{6,1,2n}$ 的一优美标号,故 $C_{6,1,2n}$ 是优美图。

定理 2 图 $C_{6,2,2n}$ 是优美图。

证明 如图 2 所示

对图 $C_{6,2,2n}$ 的顶点标号如下:

$\theta(x_{2i-1,2}) = 6i - 1, i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i,2}) = 6i - 2, i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i-1,3}) = 6i + 3 + 10(n - i), i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i,3}) = 6i + 1 + 10(n - i), i = 0,1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i-1,4}) = 6i - 5, i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i,4}) = 6i, i = 0, i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i-1,5}) = 6i + 4 + 10(n - i), i = 1,2,\cdots,n;$

$\theta(x_{2i,5}) = 6i + 10(n - i), i = 1,2,\cdots,n$。

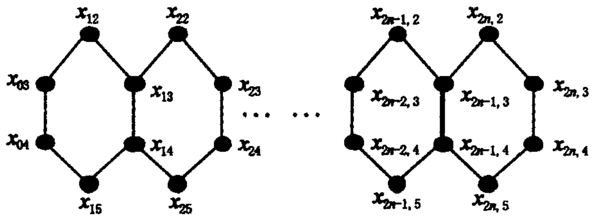

图 2 $C_{6,2,2n}$

下证上面的标号 θ 是 $C_{6,2,2n}$ 的优美标号。

(1) 由上面标号容易发现,在 i 相同时,这些标号是不同的且标号式中含 n 的式子的值大于不含 n 的式子的值。当 i 不同时,含 n 标号式子中,$i = k$ 时标号最小值总大于 $i = k + 1$ 时标号最大值;不含 n 标号式中,$i = k$ 时标号最大值总小于 $i = k + 1$ 时标号最小值。因此, 各个顶点标号是不同的,且 $|E(C_{6,2,2n})|$

$=10n+1=\max(x_{i,j}),x_{i,j}\in V(C_{6,2,2n})$。

(2) 由 θ 导出的边诱导值θ'为

$$\theta':\{|\theta(u)-\theta(v)|\,\big|\,(u,v)=e\in E(C_{6,2,2n})\}$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i,j})-\theta(x_{2i,j+1})|\,\big|\,j=2,3,4\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i-1,j})-\theta(x_{2i-1,j+1})|\,\big|\,j=2,3,4\}$$

$$\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i-1,2})-\theta(x_{2i-2,3})|,|\theta(x_{2i-1,5})-\theta(x_{2i-2,4})|\}$$

$$\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i,2})-\theta(x_{2i-1,3})|,|\theta(x_{2i,5})-\theta(x_{2i-1,4})|\}\cup\{|\theta(x_{03})-\theta(x_{04})|\}$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}\{3+10(n-i),1+10(n-i),2+10(n-i)\}\cup$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{4+10(n-i),8+10(n-i),9+10(n-i)\}$$

$$\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{6+10(n-i),10+10(n-i)\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{5+10(n-i),7+10(n-i)\}\cup\{10n+1\}$$

$$=\{1,2,3,\cdots,10n,10n+1\}。$$

从而 θ'是$E(C_{6,2,2n})$到$\{1,2,3,\cdots,10n+1\}$的一个一一对应。

因此,由(1),(2)知 θ 是 $C_{6,2,2n}$的一组优美标号,故 $C_{6,2,2n}$是优美图。

定理3　图 $C_{6,3,2n}$是优美图。

证明　如图所示

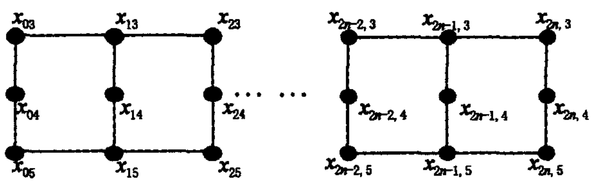

图3　$C_{6,3,2n}$

对图$C_{6,3,2n}$的顶点标号如下:

$\theta(x_{2i-1,3})=5i-1,i=1,2,\cdots,n$;

$\theta(x_{2i,3})=5i+2+8(n-i),i=0,1,2,\cdots,n$;

$\theta(x_{2i-1,4})=5i+3+8(n-1),i=1,2,\cdots,n$;

$\theta(x_{2i,4})=5i,i=0,i=1,2,\cdots,n$;

$\theta(x_{2i-1,5})=5i-4,i=1,2,\cdots,n$;

$\theta(x_{2i,5})=5i+1+8(n-i),i=0,1,2,\cdots,n$。

下证上面的标号 θ 是$C_{6,3,2n}$的优美标号。

(1) 由上面标号容易发现,在 i 相同时,这些标号是不同的且标号式中含 n 的式子的值大于不含 n 的式子的值。当 i 不同时,含 n 标号式子中,$i=k$ 时标号最小值总大于 $i=k+1$ 时标号最大值;不含 n 标号式中,$i=k$ 时标号最大值总小于 $i=k+1$ 时标号最小值。因此,各个顶点标号是不同的,且$|E(C_{6,3,2n})|=8n+2=\max(x_{i,j}),x_{i,j}\in V(C_{6,3,2n})$。

(2) 由 θ 导出的边诱导值θ'为

$$\theta':\{|\theta(u)-\theta(v)||(u,v)=e\in E(C_{6,3,2,n})\}$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i,j})-\theta(x_{2i,j+1})||j=3,4\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i-1,j})-\theta(x_{2i-1,j+1})||j=3,4\}$$

$$\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i-1,3})-\theta(x_{2i-2,3})|,|\theta(x_{2i-1,5})-\theta(x_{2i-2,5})|\}$$

$$\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{|\theta(x_{2i,3})-\theta(x_{2i-1,3})|,|\theta(x_{2i,5})-\theta(x_{2i-1,5})|\}$$

$$=\{8n+2,8n+1\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{2+8(n-i),1+8(n-i)\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{4+8(n-i),7-8(n-i)\}$$

$$\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{6+8(n-i),8+8(n-i)\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}\{3+8(n-i),5+8(n-i)\}$$

$$=\{1,2,3,\cdots,8n+1,8n+2\}。$$

从而 θ'是$E(C_{6,3,2n})$到$\{1,2,3,\cdots,8n+2\}$的一个一一对应。

因此,由(1),(2)知 θ 是$C_{6,3,2n}$的一优美标号,故 $C_{6,3,2n}$是优美图。

下面给出 $C_{6,1,4}$, $C_{6,2,4}$, $C_{6,3,4}$的一组优美标号。

(1) $C_{6,1,4}$优美标号。

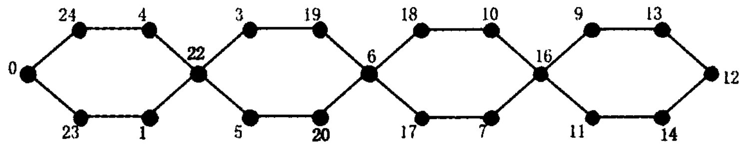

图4 $C_{6,1,4}$

(2) $C_{6,2,4}$优美标号。

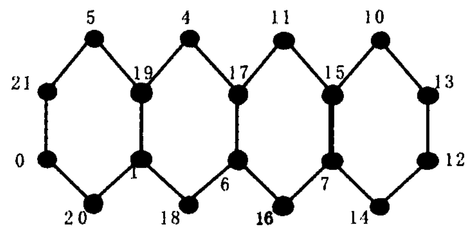

图5 $C_{6,2,4}$

(3) $C_{6,3,4}$优美标号。

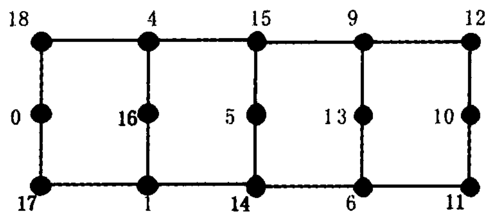

图6 $C_{6,3,4}$

参考文献:

[1] Frucht R. Graceful numbering of wheel and related graphs[J]. Ann N Y Acad Sci, 1979, 319: 219 - 229.

[2] 董俊超, 马美杰. 一些圈的并的优美性[J]. 河北师范大学(自然科学版), 2000, 24(1): 25 - 26.

[3] 斯琴巴特尔, 张天宇. 关于圈并的优美性[J]. 内蒙古民族大学(自然科学版), 2001, 16(2): 113 - 114.

[4] 马杰克. 优美图[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.

On the Gracefulness of Graph $C_{6,i,2n}$

LIU Er-gen, CAI Ke-wen, WU Dan

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: $C_{6,i,2n}$ denotes a graph that is composed of $2n$ loop C_6 which have i vertexes conhered by order one after another. In this paper, we prove that $C_{6,1,2n}$, $C_{6,2,2n}$, $C_{6,3,2n}$ are all graceful.

Key words: circle; graceful labeling; graceful graph

(责任编辑:吴泽九)