第26卷第4期 华东交通大学学报 Vol.26 No.4
2009年8月 Journal of East China Jiaotong University Aug.,2009

文章编号:1005-0523(2009)04-0104-03

广义第二类Stirling数 $S_3(n,n-tk)$ 的一个公式

吴跃生

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:根据广义第二类Stirling数的定义,得到一个有关第二类Stirling数 $S_3(n,n-tk)$ 的公式。

关键词:非空子集合;组合;第二类Stirling数;广义的第二类Stirling数

中图分类号:O157 **文献标识码**:A

在我们表述的主要结果之前,首先给出一些定义和符号。

定义1[1] 从 n 个不同事物中每次取出 m 个的组合数,记作 $C(n,m)$。

定义2[1] 将含有 n 个元素的集合分成恰好有 r 个非空子集合的分拆数目就叫做第二类Stirling数,并记作 $S_2(n,r)$,对于 $n=r=0$,我们定义 $S_2(0,0)=1$ 及 $n<r$,$S_2(n,r)=0$。

定义3[5] 将含有 n 个元素的一个集合分成恰好有 r 个至少都有 t 个元素的子集合的分拆数目就叫做广义第二类Stirling数,并记作 $S_{t+1}(n,r)$,对于 $n=r=0$,我们定义 $S_{t+1}(0,0)=1$ 及 $n<tr$,$S_{t+1}(n,r)=0$。

对于集合 X,我们用 $|X|$ 表示 X 的基数。

关于广义第二类Stirling数 $S_3(n,n-tk)$ 有下面的定理

定理1 当 $k<n\leqslant 2k$ 时,

$$S_3(n,n-k)=\sum_{h=k}^{2k-1}C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)S_4(2h-n,h-k)$$

证 设 A 是含有 n 个元素的集合,当 $k<n\leqslant 2k$ 时,按照 $S_3(n,n-k)$ 的定义,我们有且仅有下面 k 种不同情况分拆方法。

$A=\bigcup_{i=1}^{n-k}A_i$,其中 A_i $(1\leqslant i\leqslant n-k)$ 满足:(1) $A_i\bigcap_{i\neq j}A_j=\phi$ $(1\leqslant i,j\leqslant n-k)$;(2) $|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_{n-h}|=2$,$|A_{n-h+1}|\geqslant 3$,$|A_{n-h+2}|\geqslant 3$,$\cdots$,$|A_{n-k-1}|\geqslant 3$,$|A_{n-k}|\geqslant 3$ 且 $\left|\bigcup_{i=k}^{h-1}A_{n-i}\right|=2h-n$,因为 $2(n-h)+3(h-k)\leqslant n$,且 $(h-k)\geq 0$,所以可推出 $k\leqslant h<2k$,即 $h=k,k+1,\cdots,2k-1$,只有这 k 种情况存在。

我们从 A 中取出 $2(n-h)(h=k,k+1,\cdots,2k-1)$ 个元素的方法有 $C(n,2(n-h))$ 种,这 $2(n-h)$ 个元素分成 $(n-h)$ 部分,并且每一部分至少有两个元素的分拆数为 $S_3(2(n-h),n-h)$,而 A 中余下的 $2h-n(h=k,k+1,\cdots,2k-1)$ 个元素分成 $(h-k)$ 部分并且每一部分至少有三个元素的分拆数为 $S_4(2h-n,h-k)$,因此有分拆数

$$C(n,2(n-h))\ S_3(2(n-h),n-h)\ S_4(2h-n,h-k),(h=k,k+1,\cdots,2k-1)$$

故根据加法原则将 A 分成 $n-k$ 个部分的分拆数为

$$\sum_{h=k}^{2k-1}C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)S_4(2h-n,h-k)$$

因此 $S_3(n,n-k)=\sum_{h=k}^{2k-1}C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)S_4(2h-n,h-k)$

收稿日期:2009-05-25

作者简介:吴跃生(1959-),男,江西瑞金人,硕士,副教授,主要从事高等数学教学与研究。

故定理得证。

定理2　当 $2k<n\leqslant 4k$ 时,

$$S_3(n,n-2k)=\sum_{h=2k}^{4k-1}C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)S_4(2h-n,h-2k)$$

证　设 A 是含有 n 个元素的集合,当 $2k<n\leqslant 4k$ 时,按照 $S_3(n,n-2k)$ 的定义,我们有且仅有下面 $2k$ 种不同情况分拆方法。

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n-2k}A_i$, 其中 A_i $(1\leqslant i\leqslant n-2k)$ 满足:(1) $A_i\bigcap\limits_{i\neq j}A_j=\phi(1\leqslant i,j\leqslant n-2k)$;(2)$|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_{n-h}|=2,|A_{n-h+1}|\geqslant 3,|A_{n-h+2}|\geqslant 3,\cdots,|A_{n-2k-1}|\geqslant 3,|A_{n-2k}|\geqslant 3$ 且 $\left|\bigcup\limits_{i=2k}^{h-1}A_{n-i}\right|=2h-n$,因为 $2(n-h)+3(h-2k)\leqslant n$,且 $(h-2k)\geqslant 0$,所以可推出 $2k\leqslant h<4k$,即 $h=2k,2k+1,\cdots,4k-1$,只有这 $2k$ 种情况存在。

我们从 A 中取出 $2(n-h)(h=2k,2k+2,\cdots,4k-1)$个元素的方法有 $C(n,2(n-h))$ 种,这 $2(n-h)$个元素分成$(n-h)$部分并且每一部分至少有两个元素的分拆数为 $S_3(2(n-h),n-h)$,而 A 中余下的 $2h-n(h=2k,2k+2,\cdots,4k-1)$个元素分成$(h-2k)$部分并且每一部分至少有三个元素的分拆数为 $S_4(2h-n,h-2k)$,因此有分拆数

$C(n,2(n-h))\ S_3(2(n-h),n-h)\ S_4(2h-n,h-2k)$,其中 $h=2k,2k+2,\cdots,4k-1$。

故根据加法原则将 A 分成 $n-2k$ 个部分的分拆数为

$$\sum_{h=2k}^{4k-1}C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)S_4(2h-n,h-2k)$$

因此　$S_3(n,n-2k)=\sum\limits_{h=2k}^{4k-1}C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)S_4(2h-n,h-2k)$

故定理得证。

更一般地,有

定理3　当 $tk<n\leqslant 2tk$ 时,

$$S_3(n,n-tk)=\sum_{h=tk}^{2tk-1}C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)S_4(2h-n,h-tk)$$

证　设 A 是含有 n 个元素的集合,当 $tk<n\leqslant 2tk$ 时,按照 $S_3(n,n-tk)$的定义,我们有且仅有下面 tk 种不同情况分拆方法。

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n-tk}A_i$, 其中 A_i $(1\leqslant i\leqslant n-tk)$ 满足:(1) $A_i\bigcap\limits_{i\neq j}A_j=\phi$ $(1\leqslant i,j\leqslant n-tk)$;(2)$|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_{n-h}|=2,|A_{n-h+1}|\geqslant 3,|A_{n-h+2}|\geqslant 3,\cdots,|A_{n-tk-1}|\geqslant 3,|A_{n-tk}|\geqslant 3$ 且 $\left|\bigcup\limits_{i=tk}^{h-1}A_{n-i}\right|=2h-n$,因为 $2(n-h)+3(h-tk)\leqslant n$,且 $(h-tk)\geqslant 0$,所以可推出 $tk\leqslant h<2tk$,即 $h=tk,tk+1,\cdots,2tk-1$,只有这 tk 种情况存在。

我们从 A 中取出 $2(n-h)(h=tk,tk+1,\cdots,2tk-1)$个元素的方法有 $C(n,2(n-h))$种,这 $2(n-h)$个元素分成$(n-h)$部分并且每一部分至少有两个元素的分拆数为 $S_3(2(n-h),n-h)$,而 A 中余下的 $2h-n(h=tk,tk+1,\cdots,2tk-1)$个元素分成$(h-tk)$部分并且每一部分至少有三个元素的分拆数为 $S_4(2h-n,h-tk)$,因此有分拆数

$C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)\ S_4(2h-n,h-tk)$,$(h=tk,tk+1,\cdots,2tk-1)$

故根据加法原则将 A 分成 $n-tk$ 个部分的分拆数为

$$\sum_{h=tk}^{2tk-1}C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)S_4(2h-n,h-tk)$$

因此　$S_3(n,n-tk)=\sum\limits_{h=tk}^{2tk-1}C(n,2(n-h))S_3(2(n-h),n-h)S_4(2h-n,h-tk)$

故定理得证。

例如计算 $S_3(15,3)$,是定理3中 $n=15,k=4,t=3$ 的情形。

$$\begin{aligned}S_3(15,3) &= \sum_{h=12}^{23} C(15,2(15-h))\,S_3(2(15-h),15-h)\,S_4(2h-15,h-12)\\ &= C(15,6)\,S_3(6,3)\,S_4(9,0)+C(15,4)\,S_3(4,2)\,S_4(11,1)\\ &+C(15,2)\,S_3(2,1)\,S_4(13,2)+C(15,0)\,S_3(0,0)\,S_4(15,3)\\ &=0+4\,095+420\,420+1\,827\,826=2\,252\,341\end{aligned}$$

参考文献:

[1] 陈景润.组合数学简介[M].天津:天津科学技术出版社,1988.121-126.

[2] 吴跃生.第二类 Stirling 数 $S_2(n,n-k)$的一个公式[J].华东交通大学学报,2009,26(3):95-97.

[3] 杜春雨.第二类 Stirling 数的一个恒等式[J].江西师范大学学报(自然科学版).2004,(5):240-241.

[4] 吴跃生.第二类 Stirling 数的又一个恒等式[J].华东交通大学学报,2007,24(2):146-147.

[5] 吴跃生.第二类 Stirling 数 $S_2(n,n-6)$的一个公式[J].华东交通大学学报,2008,25(4):97-99.

A formula of $S_3(n,n-tk)$ of the Generalized Second Kind Stirling Numbers

WU Yue-sheng

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, according to a generalized definition of the Stirling numbers of the second kind, we obtain a formula of $S_3(n,n-tk)$ of the generalized Stirling numbers of the second kind.

Key words: non-empty subset; combinations; Stirling numbers of the second kind; generalized Stirling number of the second kind

(责任编辑:吴泽九)