文章编号:1005-0523(2011)02-0041-04

关于图的负 k-子确定数的上界

乔丽娜,陈学刚
(华北电力大学数理学院,北京 102206)

摘要: 设 $G=(V,E)$ 为一个 n 阶无向简单图, $N(v)=\{u\in V|uv\in E\}$, k 为一个整数($1\leqslant k\leqslant n$)。若函数 $f:V\to\{-1,1\}$ 满足条件:V 中至少有 k 个顶点 v ,使得 $f(N(v))\leqslant 1$ 成立,则称 f 为图 G 的一个负 k-子确定函数。称 $\beta_{kD}(G)=\max\{f(V)|f\text{为图}G\text{的负}k\text{-子确定函数}\}$ 为图 G 的负 k-子确定数。文中主要给出了图的负 k-子确定数的几个上界,进而推广了Ghameshlou等人在文献[8]中的研究结果。

关键字: 图;负 k-子确定函数;负 k-子确定数
中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

本文所指的图均为无向简单图。设 $G=(V,E)$ 为一个图, V 和 E 分别表示图 G 的顶点集和边集。对任意的 $v\in V$, $N(v)$ 和 $d(v)$ 分别表示顶点 v 在图 G 中的开邻域和度数,即 $N(v)=\{u\in V|uv\in E\}$, $d(v)=|N(v)|$ 。令 δ 和 Δ 分别表示图 G 的最小度与最大度。图 G 是 r-正则的,如果对于任意顶点 $v\in V$,都有 $d(v)=r$ [1]。

近些年来,图的控制理论的研究内容越来越丰富,各种控制概念相继产生,其中图的符号控制数就是图的控制理论中的一个重要参数。图的符号控制的概念是由Dunbar等人在文献[2]中提出,以后又有不少国内外学者定义了图的符号控制参数的其他形式,研究成果不断丰富[3-6]。Harris等人在文献[7]中将符号全控制数引申为全 k-子控制数,在此基础上Ghameshlou等人在文献[8]中定义了负 k-子确定数。

1 定义及定理

定义 1.1[7] 设 $G=(V,E)$ 为一个 n 阶图, k 为一个整数($1\leqslant k\leqslant n$)。若双值函数 $f:V\to\{-1,1\}$ 满足条件:V 中至少有 k 个顶点 v ,使得 $f(N(v))\geqslant 1$ 成立,则称 f 为图 G 的一个全 k-子控制函数。令

$$\gamma_{ks}^{t}(G)=\min\{f(V)|f\text{为图}G\text{的全}k\text{-子控制函数}\}$$

则称 $\gamma_{ks}^{t}(G)$ 为图 G 的全 k-子控制数。

定义 1.2[8] 设 $G=(V,E)$ 为一个 n 阶图, k 为一个整数($1\leqslant k\leqslant n$)。若双值函数 $f:V\to\{-1,1\}$ 满足条件:V 中至少有 k 个顶点 v ,使得 $f(N(v))\leqslant 1$ 成立,则称 f 为图 G 的一个负 k-子确定函数。令

$$\beta_{kD}(G)=\max\{f(V)|f\text{为图}G\text{的负}k\text{-子确定函数}\}$$

则称 $\beta_{kD}(G)$ 为图 G 的负 k-子确定数。

在文献[8]中,Chameshlou等人证明了如下定理。

定理 1.1[8] 设 f 为 G 的负 k-子确定函数,令 $B_f=\{v\in V|f(N(v))\leqslant 1\}$ 。则对任取 $v\in B_f$,当 $d(v)$ 为偶

收稿日期: 2011-01-05
基金项目: 国家自然科学基金项目(10901051);中央高校基础科研基金(10ML37,10ML39)
作者简介: 乔丽娜(1986—),女,满族,硕士研究生,研究方向为图论及其应用。

数时，$f\left(N(v)\right)\leqslant 0$；当 $d(v)$ 为奇数时，$f\left(N(v)\right)\leqslant 1$。

定理1.2[8] 设 G 为 n 阶图，则

$$\beta_{kD}(G)\leqslant\frac{t-k\Delta+3n\Delta-2n\delta}{\delta}$$

式中：$B_f=\left\{v\in V\,\middle|\,f\left(N(v)\right)\leqslant 1\right\}$，$O\left(B_f\right)$ 为 B_f 中度数为奇数的点的集合，$\left|O\left(B_f\right)\right|=t$。

推论1.3[8] 对于任意 r-正则图 G，$\beta_{kD}(G)\leqslant\begin{cases}n-k+\dfrac{n}{r}, & 当r为奇数\\ n-k, & 当r为偶数\end{cases}$

本文主要给出了图的负 k-子确定数的几个上界，进而推广了Ghameshlou等人在文献[8]中的一些结果。

2 主要结论

定理2.1 设 G 为 n 阶图，则

$$\beta_{kD}(G)\leqslant\frac{2(t-k\Delta+2n\Delta-n\delta)}{\Delta+\delta}$$

其中：$B_f=\left\{v\in V\,\middle|\,f\left(N(v)\right)\leqslant 1\right\}$，$O\left(B_f\right)$ 为 B_f 中度数为奇数的点的集合，$\left|O\left(B_f\right)\right|=t$。

证明 令 $N=\sum\limits_{v\in V}\sum\limits_{u\in N(v)}f(u)$，显然 $N=\sum\limits_{u\in V}\left(d(u)f(u)\right)$。

一方面，根据定理1.1，得到

$$\begin{aligned}N=&\sum_{v\in O\left(B_f\right)}f\left(N(v)\right)+\sum_{v\in\left(B_f-O\left(B_f\right)\right)}f\left(N(v)\right)+\sum_{v\in\left(V-B_f\right)}f\left(N(v)\right)\leqslant\\&t+\sum_{v\in\left(V-B_f\right)}f\left(N(v)\right)\leqslant t+\sum_{v\in\left(V-B_f\right)}\Delta=t+\left(n-\left|B_f\right|\right)\Delta\leqslant t+(n-k)\Delta\end{aligned}\tag{1}$$

另一方面，令 $P=\left\{v\in V\,\middle|\,f\left(N(v)\right)=1\right\}$，$M=\left\{v\in V\,\middle|\,f\left(N(v)\right)=-1\right\}$

则

$$\begin{aligned}N=&\sum_{u\in V}\left(d(u)f(u)\right)=\sum_{u\in P}d(u)-\sum_{u\in M}d(u)=\\&\sum_{u\in V}d(u)-2\sum_{u\in M}d(u)\geqslant n\delta-2\left(n-|P|\right)\Delta\end{aligned}$$

结合(1)得

$$n\delta-2\left(n-|P|\right)\Delta\leqslant N\leqslant t+(n-k)\Delta\tag{2}$$

而

$$N=\sum_{u\in V}\left(d(u)f(u)\right)=2\sum_{u\in P}d(u)-\sum_{u\in V}d(u)\geqslant 2|P|\delta-n\Delta$$

结合(1)得

$$2|P|\delta-n\Delta\leqslant N\leqslant t+(n-k)\Delta\tag{3}$$

将(2)与(3)相加得

$$n\delta-3n\Delta+2(\Delta+\delta)|P|\leqslant 2(t+n\Delta-k\Delta)$$

即

$$2|P|\leqslant\frac{2t+5n\Delta-2k\Delta-n\delta}{\Delta+\delta}$$

所以

$$\beta_{kD}(G)=2|P|-n\leqslant\frac{2(t-k\Delta+2n\Delta-n\delta)}{\Delta+\delta}$$

由此，我们可以看出，当 G 不是正则图时，定理2.1给出的界要比定理1.2给出的界小；当 G 为正则图时，两定理给出的界是相等的。

定理2.2 对于任意n阶图G,若其度序列为$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_{n-1} \leqslant d_n$,则有

$$\beta_{kD}(G) \leqslant \frac{2}{d_n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1-d_j}{2}\right)+n$$

证明 设g为图$G=(V,E)$的一个最大的负k-子确定函数,由定义知,存在k个不同的点v_{j1},v_{j2},$\cdots$,v_{jk},使得$g\left(N\left(v_{ji}\right)\right) \leqslant 1\,(i=1,\cdots,k)$成立。对任意$v \in V$,令$f(v)=\dfrac{g(v)-1}{2}$,则$f{:}V \to \{-1,0\}$,且有

$$\sum_{i=1}^{k} f(N(v_{ji}))=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{g(N(v_{ji})-d_{ji}}{2}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1-d_{ji}}{2}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1-d_j}{2}\right)$$

另一方面,由于

$$\sum_{i=1}^{k} f\left(N\left(v_{ji}\right)\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} f\left(N\left(v_j\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(d_j f\left(v_j\right)\right) \geqslant d_n f(V)$$

故

$$d_n f(V) \leqslant \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1-d_j}{2}\right),\text{即 } f(V) \leqslant \frac{1}{d_n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1-d_j}{2}\right)$$

所以

$$\beta_{kD}(G)=g(V)=2f(V)+n \leqslant \frac{2}{d_n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1-d_j}{2}\right)+n\text{。}$$

定理2.3 设G为一个n阶m条边的连通图,则

$$\beta_{kD}(G) \leqslant \frac{2m+(n-k)\Delta+k}{\delta}-n$$

证明 设f为负k-子确定函数,并且满足$f(V)=\beta_{kD}(G)$,令

$$P=\left\{v \in V \middle| f(v)=1\right\} \qquad M=\left\{v \in V \middle| f(v)=-1\right\}$$

$$P_1=\left\{v \in P \middle| f\left(N(v)\right) \leqslant 1\right\} \quad M_1=\left\{v \in V \middle| f\left(N(v)\right) \leqslant 1\right\}$$

$$P_2=P-P_1 \qquad M_2=M-M_1$$

则$|P|+|M|=n$,$|P_1|+|M_1| \geqslant k$,且$|P_2|+|M_2| \leqslant n-k$。

对任意$v \in P_1 \cup M_1$,则v点至多连接$\dfrac{d(v)+1}{2}$个P中的点,故有

$$\begin{aligned}\delta|P| &\leqslant \sum_{v \in P} d(v)=\sum_{v \in V}|P \cap N(v)| \leqslant \sum_{v \in P_1}\frac{d(v)+1}{2}+\sum_{v \in M_1}\frac{d(v)+1}{2}+\sum_{v \in P_2 \cup M_2} d(v)= \\ &\frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v)+\frac{1}{2}(|P_1|+|M_1|)+\frac{1}{2}\sum_{v \in P_2 \cup M_2} d(v) \leqslant m+\frac{1}{2}\left(n-\left(|P_2|+|M_2|\right)\right)+\frac{1}{2}\left(|P_2|+|M_2|\right)\Delta= \\ &m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\left(|P_2|+|M_2|\right)(\Delta-1) \leq m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}(n-k)(\Delta-1)\end{aligned}$$

所以

$$|P| \leqslant \frac{m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}(n-k)(\Delta-1)}{\delta}$$

即

$$\beta_{kD}(G)=2|P|-n \leqslant \frac{2m+(n-k)\Delta+k}{\delta}-n$$

在定理2.3的基础上,如果每一点的度数都是偶数,我们可以得到更为精确的上界。

定理2.4 设G为一个n阶m条边的连通图,并且每点度数均为偶数,则

$$\beta_{kD}(G) \leqslant \frac{2m+(n-k)\Delta}{\delta}-n$$

证明 设f为负k-子确定函数,并且满足$f(V)=\beta_{kD}(G)$,P,M,P_1,M_1,P_2,M_2定义如定理2.3,则依然可以得到$|P|+|M|=n$,$|P_1|+|M_1| \geqslant k$,且$|P_2|+|M_2| \leqslant n-k$。

对任意 $v\in P_1\cup M_1$，则 v 点至多连接 $\frac{d(v)}{2}$ 个 P 中的点，故有

$$\delta|P|\leqslant\sum_{v\in P}d(v)=\sum_{v\in V}|P\cap N(v)|\leqslant\sum_{v\in P_1}\frac{d(v)}{2}+\sum_{v\in M_1}\frac{d(v)}{2}+\sum_{v\in P_2\cup M_2}d(v)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}d(v)+\frac{1}{2}\sum_{v\in P_2\cup M_2}d(v)\leqslant$$

$$m+\frac{1}{2}\left(|P_2|+|M_2|\right)\Delta\leqslant m+\frac{1}{2}(n-k)\Delta$$

所以
$$|P|\leqslant\frac{m+\frac{1}{2}(n-k)\Delta}{\delta}$$

即
$$\beta_{kD}(G)=2|P|-n\leqslant\frac{2m+(n-k)\Delta}{\delta}-n。$$

由定理2.3，定理2.4，我们可以得到如下推论：

推论2.5 对于任意 n 阶 r-正则图 G，则有

$$\beta_{kD}(G)\leqslant\begin{cases}n-k+\frac{k}{r}, & 当r为奇数\\ n-k, & 当r为偶数\end{cases}$$

显然，我们可以看出，当 r 为奇数时，推论2.5比推论1.3好。

参考文献：

[1] BONDY J A，MURTY U S R. 图论及其应用[M]. 吴望名，李念祖，吴兰芳，等译. 北京：科学出版社，1984.

[2] DUNBAR J E，HEDETNIEMI S T，HENNING M A，et al. Signed domination in graphs [J]. Graph Theory，Combinatorics and Applications，1995(1)：311-322.

[3] 徐保根.图的控制理论[M]. 北京：科学出版社，2008.

[4] CHANG G J，LIAW S C，YEH H G. *k*-Subdomination in graphs[J]. Discrete Applied Mathematics，2002，120：55-60.

[5] KANG L，QIAO H，SHAN E，et al. Lower bounds on the minus domination and k-subdomination numbers[J]. Theoretical Computer Science，2003，296：89-98.

[6] 赵金凤，徐保根.关于图的符号边控制数的下界[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2010，34(1)：27-29.

[7] HARRIS L，HATTINGH J H，HENNING M A. Total k-subdominating functions on graphs[J]. Australasian Journal of Combinatorics，2006，35：141-154.

[8] GHAMESHLOU A N，KHODKAR A，SAEI R，et al. Negative *k*-Subdecision numbers in graphs[J]. AKCE International Journal of Graphs and Combinations，2009，6(3)：361-371.

Upper Bounds on the Negative *k*-Subdecision Number of Graphs

Qiao Lina ，Chen Xuegang

（Department of Mathematics and Physics，North China Electric Power University，Beijing 102206，China）

Abstract：Let $G=(V,E)$ be a simple undirected graph with order n，$N(v)=\{u\in V|uv\in E\}$，k is an integer ($1\leqslant k\leqslant n$). If a function $f:V\to\{-1,1\}$ satisfies $f(N(v))\leqslant 1$ for at least k vertices v of G，then we called f is a negative *k*-subdecision function of G. $\beta_{kD}(G)=\max\{f(V)|f$ is a negative k-subdecision function of $G\}$ is called negative k-subdecision number of G.This paper mainly give several upper bounds of negative k-subdecision number，and some results of ghameshlou in [8] are improved.

Key words：graphs；negative k-subdecision function；negative k-subdecision number