文章编号:1005-0523(2013)03-0026-06

图的相对结合数与图的结构的两个新结果

邓毅雄[1],曾爱祥[2]

(1. 华东交通大学软件学院,江西 南昌 330013; 2. 江西省新干县湖中学,江西 吉安 331303)

摘要:在已有研究的基础上,进一步讨论图的相对结合数 $rb(G)$ 与图的结构的关系,主要得到有关 $rb(G)=n-6$ 和 $rb(G)=4-n$ 时的结果。

关键词:图;连通图;相对结合数;图的结构

中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A

本文仅讨论简单图,未加定义或说明的术语与符号可参考文献[1-2]。

图的相对结合数[1]的定义为图 $G=(V,E)$ 的相对结合数(relative binding number) $rb(G)=\max\{|S|-|N(S)| \,|\, \varnothing\neq S\subseteq V, N(S)\neq V\}$。

其中 $N(S)=N_G(S)$ 表示点集 S 的邻域。若对 $S^*\subseteq V$,$S^*\neq\varnothing$ 且 $N(S^*)\neq V$,使 $rb(G)=\left|S^*\right|-\left|N(S^*)\right|$,则称 S^* 为 G 的一个 rb -集。

文中用到的几个记号的说明:设有图 G_1 ,G_2 ,G_3 ,我们用 G_1+G_2 表示 G_1 中各点与 G_2 中各点分别邻接所得之图,即 $V(G_1+G_2)=V(G_1)\cup V(G_2)$,$E(G_1+G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{e|e=uv, u\in V(G_1), v\in V(G_2)\}$;用 $G_1+G_2+G_3$ 表示 G_1 中各点与 G_2 中各点分别邻接,而 G_2 中各点与 G_3 中各点亦分别邻接所得之图,其它情形类似定义。设 S 是 G 的一个点集,用 $G[S]$ 表示 S 在 G 中的生成子图,即 $V(G[S])=S$,$E(G[S])=\{e|e=uv, u, v\in S, 且e\in E(G)\}$ 。以下我们用 F_m 表示所有可能的 m 阶图中的某一个图。用 $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度,$\varnothing$ 为空集符号。

在对图的相对结合数的讨论中,考虑满足 $rb(G)=k$ 的图类是一个非常有趣的问题,在文献[3-5]中,对这方面问题进行了一定讨论,本文对这个问题的进一步讨论,得到了两个相关的结果。下面我们首先将文献[3-4]中的有关结果归纳如下:

定理1[4] 对任意 $2-n\leqslant k\leqslant n-2$,$k\neq 3-n$ 或 $n-3$,存在 n 阶连通图 G ,使 $rb(G)=k$ 。

定理2[3] 设 G 是 n 阶连通图($n\geqslant 2$),则 $rb(G)=2-n$ 当且仅当 $G=K_n$;$rb(G)=n-2$ 当且仅当 $G=K_{1,n-1}$。

定理3[4] 设 G 是 n 阶连通图($n\geqslant 4$),则 $rb(G)=n-4$ 当且仅当 G 为 $\bar{K}_{n-2}+K_2$ 或 $\bar{K}_{n-2}+K_2$ 的连通生成子图但 $G\neq K_{1,n-1}$。

定理4[4] 设 G 是 n 阶连通图($n\geqslant 5$),则 $rb(G)=n-5$ 当且仅当 G 为 $\bar{K}_{n-4}+K_1+K_3$ 或在该图的 K_1 与 K_3 之间删除至多两条边所得之连通图。

收稿日期:2013-04-03

作者简介:邓毅雄(1963-),男,教授,硕士,研究方向为图论与组合优化等。

1　主要结果

定理5　对任意 n 阶($n\geqslant 6$)连通图 G , $rb(G)=n-6$ 当且仅当 G 为下列图之一:

1) $\bar{K}_{n-5}+K_1+2K_2$ 或在该图的 K_1 与每个 K_2 之间各至多删除一条边所得之连通图;

2) $\bar{K}_{n-5}+K_1+F_4$ (其中 F_4 为除 $K_{1,3}$ 外所有可能的4阶流通图中的某一个)或在该图的 K_1 与每个 F_4 之间至多删除三条边所得之连通图;

3) $\bar{K}_{n-4}+K_2$ (或 $\bar{K}_2$)+ K_2 ,或在上述图的 $\bar{K}_{n-4}$ 与 K_2 (或 $\bar{K}_2$)之间删除若干条边但 K_2 (或 $\bar{K}_2$)中各点至少与 $\bar{K}_{n-4}$ 一个点邻接,以及在 K_2 (或 $\bar{K}_2$)与 K_2 之间删除若干条边所得的连通子图;

4) $\bar{K}_{n-3}+F_3$ (其中 F_3 为所有可能的3阶图中之某一个图),或在上述图的 $\bar{K}_{n-3}$ 与 F_3 之间删除若干条边所得的连通子图,但不含图 $\bar{K}_{n-4}+K_1+K_1+F_2$ 及其连通子图。

定理6　对任意 n 阶($n\geqslant 4$)连通图 G ,则 $rb(G)=4-n$ 当且仅当 G 具有如下结构之一:

1) $K_1+F_{n-3}+K_2$ (其中 $\delta(F_{n-3})\geqslant n-6$)或在该图的 F_{n-3} 与 K_2 之间删除若干条边所得之最小度至少为 $n-3$ 的连通图;

2) $\bar{K}_2+F_{n-2}$ (其中 $\delta(F_{n-2})\geqslant n-5$)或在该图的 F_{n-2} 与 $\bar{K}_2$ 之间删除若干条边所得之最小度至少为 $n-3$ 的连通图;

3) $2K_2+F_{n-4}$ (其中 $\delta(F_{n-4})\geqslant n-4$)或在该图的 $2K_2$ 与 F_{n-4} 之间删除若干条边所得之最小度至少为 $n-3$ 的连通图。

2　定理证明

定理5的证明　首先我们注意到,若 G 取得定理所给出的图,易于验证它们均满足 $rb(G)=n-6$,也即充分性成立,定理的证明关键是其必要性。

现如果 $rb(G)=n-6$,我们设 S 为 G 的一个 rb − 集,且记 $t=|S|$,则由 G 为连通图且 $|S|-|N(S)|=n-6$,有 $|N(S)|=t-n+6\geqslant 1$ 。

情形1　当 $|N(S)|=1$ 时, $t=n-5$,设 $N(S)=\{u\}$, $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-5}\}$,此时 S 在图 G 中必为点独立集, $G[S\cup N(S)]=\bar{K}_{n-5}+K_1$,即为 $K_{1,n-5}$,且显然 $\forall v\in S$, $w\in V\backslash(S\cup N(S))$, $vw\notin E(G)$,此时 $|V\backslash(S\cup N(S))|=4$。

下面考虑 G 的生成子图 $G[V\backslash(S\cup N(S))]$ 的结构。

情形1.1　当 $G[V\backslash(S\cup N(S))]$ 存在孤立点时,设 $w_0\in V\backslash(S\cup N(S))$ 为孤立点,则由情形1的假设及 G 的连通性,必有 $w_0u\in E(G)$,从而若取 $S'=S\cup\{w_0\}$,仍有 $N(S')=\{u\}$,这就导致 $rb(G)\geqslant|S'|-|N(S')|=(|S|+1)-|N(S)|)=n-5>n-6$,矛盾。

情形1.2　当 $G[V\backslash(S\cup N(S))]$ 不存在孤立点时,由 $|V\backslash(S\cup N(S))|=4$,此时生成子图 $G[V\backslash(S\cup N(S))]$ 的可能情形只有如图1所示7种。

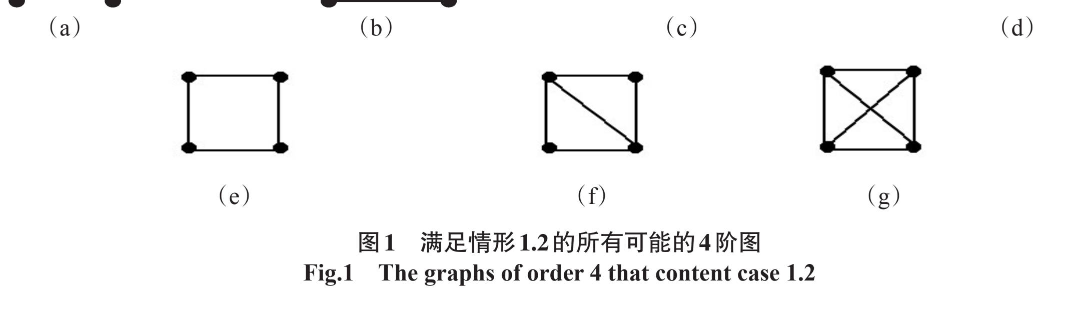

图1　满足情形1.2的所有可能的4阶图
Fig.1　The graphs of order 4 that content case 1.2

情形 1.2.1 若 $G[V\backslash(S\cup N(S))]=2K_2$，即为图 1(a)，则由 G 的连通性，$N(S)=\{u\}$ 对应的 K_1 与 $G[V\backslash(S\cup N(S))]$ 的 2 K_2 的邻接关系只能为如图 2(a)(b)(c)所示情况之一。

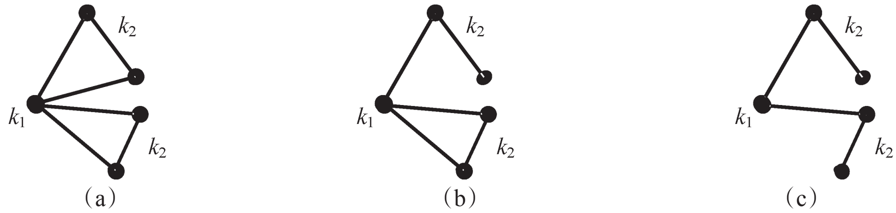

图2 K_1 与 $2K_2$ 的邻接关系

Fig.2 Adjacent relationship of K_1 and $2K_2$

因此，在此情形下，G 为 $\bar{K}_{n-5}+K_1+2K_2$ 或在该图的 K_1 与每个 K_2 之间各至多删除一条边所得之连通图。

情形 1.2.2 若 $G[V\backslash(S\cup N(S))]=K_{1,3}$，即为图 1(b)，设 $V\backslash(S\cup N(S))=\{w_0,w_1,w_2,w_3\}$，其中 w_0 为 $K_{1,3}$ 中心点，取 $S'=s\cup\{w_1,w_2,w_3\}$，则有 $N([S'])=\{u,\ w_0\}$，这就导致 $rb(G)\geqslant|S'|-|N(S')|=(|S|+3)-(|N(S)|+1)=|S|-|N(S)|+2=n-4>n-6$，矛盾。

情形 1.2.3 若 $G[V\backslash(S\cup N(S))]$ 为如图 1 所示的(c)(d)(e)(f)(g)5 种情形，用 F_4 表示除 $K_{1,3}$ 外的4阶连通图中的某一个，则在此情形下，图 G 的结构为 $\bar{K}_{n-5}+K_1+F_4$ 或在该图的 K_1 与 F_4 之间删除若干条边所得之连通图。

情形2 当 $|N(S)|=2$ 时，$t=n-4$，设 $N(S)=\{u_1,u_2\}$，$S=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-4}\}$。

情形 2.1 若 $N(S)\cap S=\varnothing$，此时 S 必为图 G 的点独立集，所以生成子图 $G[S\cup N(S)]=\bar{K}_{n-4}+K_2$ 或 $\bar{K}_{n-4}+\bar{K}_2$。

另外，我们注意到，如图3所示图类不满足 $rb(G)=n-6$。

所以，满足要求的图 $G[S\cup N(S)]=\bar{K}_{n-4}+K_2$，或 $\bar{K}_{n-4}+\bar{K}_2$，或上述两图的连通子图，但 K_2(或 $\bar{K}_2$)的两个点至少各与 $\bar{K}_{n-4}$ 中一个点邻接。

我们注意到，$|V\backslash(S\cup N(S))|=2$，不妨设 $V\backslash(S\cup N(S))=\{w_1,w_2\}$。$\forall v_j\in S$，$w_k\in V\backslash(S\cup N(S))$，显然 $v_jw_k\notin E(G)$ ($j=1,2,\cdots,n-4,k=1,2$)，否则导致 $|N(S)|\geqslant 3$，矛盾。所以至多有 $u_iw_k\in E(G)$ ($i=1,2,k=1,2$)。

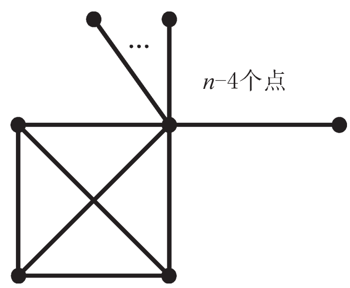

图3 一类不满足 $rb(G)=n-6$ 的图

Fig.3 A class graph of discontent $rb(G)=n-6$

另外，显然生成子图 $G[\{w_1,w_2\}]$ 或者为 K_2 或为 $\bar{K}_2$。如果 $G[\{w_1,w_2\}]=\bar{K}_2$，我们可取 $S'=S\cup\{w_1,w_2\}$，类似可导出 $rb(G)>n-6$ 的矛盾，故 $G[\{w_1,w_2\}]=K_2$。

所以，在图 G 中，$V\backslash(S\cup N(S))$ 与 $N(S)$ 之间的邻接结构为 K_2(或 $\bar{K}_2$)+ K_2，或它们之间删除若干条边所得的连通子图。

因此，在此情形下，G 为 $\bar{K}_{n-4}+K_2$(或 $\bar{K}_2$)+ K_2，或在上述图的 $\bar{K}_{n-4}$ 与 K_2(或 $\bar{K}_2$)之间删除若干条边但 K_2(或 $\bar{K}_2$)中各点至少与 $\bar{K}_{n-4}$ 一个点邻接，以及 K_2(或 $\bar{K}_2$)与 K_2 之间删除若干条边所得的连通子图。

情形 2.2 若 $N(S)\cap S\neq\varnothing$，不妨设 $u_1\in N(S)\cap S$。要使 $u_1\in N(S)$，必存在 $v_i\in S$，且 $v_i\neq w_k$ ($k=1,2$)，使 $u_1v_i\in E(G)$。(i)当 $v_i=u_2$ 时，得到 $u_2\in S$，由 G 的连通性，必存在 $v_j\in S$，使 $u_2v_j\in E(G)$，则 $v_j\in N(S)$，从而导致 $|N(S)|\geqslant 3$，矛盾；(ii) 当 $v_i\neq u_2$ 时，由于 $u_1\in N(S)$，则 $v_i\in N(S)$，从而也导致 $|N(S)|\geqslant 3$，矛盾。

情形3　当 $|N(S)|=3$ 时，$t=n-3$，设 $N(S)=\{u_1,u_2,u_3\}$，$S=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-3}\}$。

情形3.1　若 $N(S)\cap S=\varnothing$，此时 $|V\backslash(S\cup N(S))|=0$，且 S 必为图 G 的点独立集，生成子图 $G[S]=\bar{K}_{n-3}$，而生成子图 $G[N(S)]$ 为所有可能的3阶图，即 $G[N(S)]=F_3$，故生成子图 $G[S\cup N(S)]=\bar{K}_{n-3}+F_3$（其中 F_3 为所以可能的3阶图中的某一个），或在 $\bar{K}_{n-3}$ 与 F_3 之间删除若干条边所得的连通子图，但 F_3 中的每点至少与 $\bar{K}_{n-3}$ 中的一个点邻接。

另外，我们注意到，如果存在 $N(S)$ 中的两个点只与一个 S 中的点邻接，不妨设点 u_2,u_3 只与点 v_{n-3} 邻接，那么可取 $S'=S\backslash\{v_{n-3}\}$，则 $N(S')=\{u_1\}$，这将导致 $rb(G)\geqslant n-5>n-6$ 的矛盾，即 $G=\bar{K}_{n-4}+K_1+K_1+F_2$ 不满足 $rb(G)=n-6$，其中 F_2 是 K_2 或 $\bar{K}_2$。

因此，在此情形下，G 为 $\bar{K}_{n-3}+F_3$（其中 F_3 为所以可能的3阶图中的某一个），或在上述图的 $\bar{K}_{n-3}$ 与 F_3 之间删除若干条边所得的连通子图，但 F_3 中的每点至少与 $\bar{K}_{n-3}$ 中的一个点邻接，且不含图 $\bar{K}_{n-4}+K_1+K_1+F_2$ 及其连通子图。

情形3.2　若 $N(S)\cap S\neq\varnothing$，不妨设 $u_1\in N(S)\cap S$。要使 $u_1\in N(S)$，必存在 $v_i\in S$，使 $u_1v_i\in E(G)$。又由于 $u_1\in S$，则 $v_i\in N(S)$。因为 G 是连通图，那么 u_1,v_i 中至少一个点还与 G 中其它点邻接，不妨设存在 $w\in V\backslash\{u_1,v_i\}$，使得 $u_1w\in E(G)$，这样，由于 $u_1\in S$，则 $w\in N(S)$。还是由于 G 的连通性，w,u_1,v_i 中至少有一个点与 G 中其它点邻接，(i) 如果是 u_1,v_i 中某点与 G 中除 w,u_1,v_i 外其它点邻接，那么必导致 $|N(S)|>3$，矛盾；(ii) 如果只是 w 与 G 中除 w,u_1,v_i 外其它点邻接，这时对 $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-3}\}$，$N(S)=\{w\}$，则 $rb(G)\geqslant|S|-|N(S)|=(n-3)-1=n-4>n-6$，矛盾。

情形4　当 $|N(S)|=4$ 时，$t=n-2$，设 $N(S)=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，$S=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-2}\}$。

情形4.1　若 $|N(S)\cap S|\leqslant 1$，则由容斥原理，$|V|\geqslant|S|+|N(S)|-1=n+1>n$，矛盾。

情形4.2　若 $|N(S)\cap S|=2$，设 $N(S)\cap S=\{u_1,u_2\}$，由 $u_1\in N(S)$，必存在 $v_i\in S$，使 $u_1v_i\in E(G)$。又由于 $u_1\in S$，则 $v_i\in N(S)$。此时或者 $v_i=u_2$ 或者 $v_i\neq u_2$。如果 $v_i\neq u_2$，那么 $v_i\in S$ 且 $v_i\in N(S)$，这将导致 $|N(S)|>4$ 的矛盾，所以 $v_i=u_2$，也即 $u_1u_2\in E(G)$。这样，S 中除 u_1,u_2 外其它任意点之间都两两不相邻，从而 $\{u_1,u_2\}$ 是独立集，且 $S\backslash\{u_1,u_2\}$ 中的点不与 u_1,u_2 邻接，故只能与 u_3,u_4 邻接。

因此，类似于情形2.1，我们得到 G 为 $\bar{K}_{n-4}+K_2$（或 $\bar{K}_2$）$+K_2$，或在上述图的 $\bar{K}_{n-4}$ 与 K_2（或 $\bar{K}_2$）之间删除若干条边但 K_2（或 $\bar{K}_2$）中各点至少与 $\bar{K}_{n-4}$ 一个点邻接，以及 K_2（或 $\bar{K}_2$）与 K_2 之间删除若干条边所得的连通子图。

情形4.3　若 $|N(S)\cap S|=3$，此时 $|V\backslash(S\cup N(S))|=1$，设 $w\in V\backslash(S\cup N(S))$。显然 w 不能与 S 中点邻接，否则将导致 $|N(S)|>4$ 的矛盾。又由于 G 是连通图，从而 w 至少与 $N(S)$ 中至少一个点邻接，那么我们取 $S'=S\cup\{w\}$，这时 $N(S')=N(S)$，所以 $rb(G)\geqslant|S'|-|N(S')|=(|S|+1)-|N(S)|=n-5>n-6$，矛盾。

情形4.4　若 $|N(S)\cap S|=4$，同样易于证明，这必导致 $|N(S)|>4$ 的矛盾。

情形5　当 $|N(S)|=5$ 时，$t=n-1$，设 $N(S)=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，$S=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\}$。

情形5.1　若 $|N(S)\cap S|\leqslant 3$，则由容斥原理，$|V|\geqslant|S|+|N(S)|-3=n+1>n$，矛盾。

情形5.2　若 $|N(S)\cap S|=4$，不妨设 $u_1,u_2,u_3,u_4\in S,u_5\notin S$，此时 $V\backslash(S\cup N(S))=\varnothing$，即 $V=S\cup N(S)$。一方面，我们注意到 $S\backslash\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 在图 G 中必为点独立集，且不与 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 中点邻接，否则，显然必导致 $|N(S)|>5$ 的矛盾；另一方面，由于 G 的连通性，$S\backslash\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 中点必均与 u_5 邻接。

因此，类似于情形1.2.3，我们有，G 为 $\bar{K}_{n-5}+K_1+F_4$（其中 F_4 为除 $K_{1,3}$ 外所有可能的4阶流通图）或在该图的 K_1 与每个 F_4 之间删除若干边所得之连通图。

情形5.3 若$\left|N(S)\cap S\right|=5$，同样易于证明，这必导致$\left|N(S)\cap S\right|>5$，矛盾。

情形6 当$\left|N(S)\right|\geqslant 6$时，$t\geqslant n$，由$G$的连通性，$N(S)=V$，与$rb(G)$的定义矛盾。

综上所述，定理5结论成立。

为证明定理6，我们首先给出下面引理：

引理1[3] 设G是n阶（$n\geqslant 4$）连通图，若$rb(G)=4-n$，则$\delta(G)=n-2$或$n-3$。

由引理1，满足$rb(G)=4-n$的图G的最小度至少是$n-3$。

定理6的证明 首先我们注意到，若G取得所给出的图，易于验证必有$rb(G)=4-n$，充分性成立。

现如果$rb(G)=4-n$，我们设S为G的一个$rb-$集，且记$t=\left|S\right|$，则由$\left|S\right|-\left|N(S)\right|=4-n$，有$\left|N(S)\right|=t+n-4$，由$rb(G)$的定义，$N(S)\neq V(G)$，所以$\left|N(S)\right|=t+n-4\leqslant n-1$，从而$t\leqslant 3$。

情形1 当$t=1$时，$\left|N(S)\right|=n-3$，$\left|V\backslash(S\cup N(S))\right|=2$。设$S=\{u\}$，这时$G$的生成子图$G[N(S)]=F_{n-3}$（其中$F_{n-3}$为某$n-3$阶图），显然$u$与$F_{n-3}$中每个点必邻接，从而$G$的生成子图$G[S\cup N(S)]=K_1+F_{n-3}$。另外，$V\backslash(S\cup N(S))$中的两个点只能与N(S)中的点邻接，我们注意到，如果$G[V\backslash(S\cup N(S))]=\bar{K}_2$，那么取$S'=V\backslash N(S)$，则有$N(S')=N(S)$，$rb(G)\geqslant\left|S'\right|-\left|N(S')\right|=(\left|S\right|+2)-\left|N(S)\right|=rb(G)+2$，矛盾，所以$G[V\backslash(S\cup N(S))]=K_2$。

因此，G为$K_1+F_{n-3}+K_2$或在该图的F_{n-3}与K_2之间删除若干条边所得之最小度至少为$n-3$的连通图，且由引理1知，$\delta(F_{n-3})\geqslant n-6$。

情形2 当$t=2$时，$\left|N(S)\right|=n-2$，设$S=\{u_1,u_2\}$，$N(S)=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-2}\}$。

情形2.1 若$N(S)\cap S=\varnothing$，则$V\backslash(S\cup N(S))=\varnothing$。这时显然$S=\{u_1,u_2\}$是图$G$的点独立集，且$G[N(S)]=F_{n-2}$（其中$F_{n-2}$为某一个$n-2$阶图）。

因此，G为$\bar{K}_2+F_{n-2}$或在该图的F_{n-2}与$\bar{K}_2$之间删除若干条边所得之最小度至少为$n-3$的连通图，且由引理1知，$\delta(F_{n-2})\geqslant n-5$。

情形2.2 若$N(S)\cap S\neq\varnothing$，不妨设$u_1\in N(S)\cap S$。那么由于$u_1\in N(S)$，则必有$u_1u_2\in E(G)$；又由$u_1\in S$，则$u_2\in N(S)$，故$\left|N(S)\cap S\right|=2$，从而由容斥原理，$\left|V\backslash(S\cup N(S)\right|=\left|V\right|-(\left|S\right|+\left|N(S)\right|-\left|N(S)\cap S\right|)=n-[2+(n-2)-2]=2$。

设$V\backslash(S\cup N(S)=\{w_1,w_2\}$，由图$G$的连通性，$w_1$和$w_2$至少各与$N(S)$中一个点邻接。我们注意到，如果$w_1w_2\notin E(G)$，那么可取$S'=\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$，这时有$N(S')=N(S)$，这就导致$rb(G)\geqslant\left|S'\right|-\left|N(S')\right|=(\left|S\right|+2)-\left|N(S)\right|=rb(G)+2$，矛盾。所以$G[V\backslash(S\cup N(S)]=K_2$，而且$w_1,w_2$不与$u_1,u_2$邻接。

因此，G为$2K_2+F_{n-4}$或在该图的$2K_2$与F_{n-4}之间删除若干条边所得之最小度至少为$n-3$的连通图，且由引理1知，$\delta(F_{n-4})\geqslant n-4$。

情形3 当$t=3$时，$\left|N(S)\right|=n-1$，此时由容斥原理，$n=\left|V\right|\geqslant\left|S\right|+\left|N(S)\right|-\left|S\cap N(S)\right|=3+(n-1)-\left|N(S)\cap S\right|$，从而得到$\left|N(S)\cap S\right|\geqslant 2$。设$S=\{u_1,u_2,u_3\}$，$N(S)=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\}$。

情形3.1 若$\left|N(S)\cap S\right|=2$，那么由容斥原理，$\left|V\backslash(S\cup N(S)\right|=\left|V\right|-(\left|S\right|+\left|N(S)\right|-\left|N(S)\cap S\right|)=n-[3+(n-1)-2]=0$，即$\left|V\backslash(S\cup N(S)\right|=\varnothing$。

不妨设$u_1,u_2\in N(S)\cap S$，则只能有$u_1u_2\in E(G)$，否则若$u_1,u_2\in N(\{u_3\})$，这将导致$u_3\in N(S)$，$N(S)=V$，矛盾。从而u_3不与u_1,u_2邻接。设$G[N(S)\backslash\{u_1,u_2\}]=F_{n-3}$。

因此，此时G的结构完全与情形1相同。

情形3.2 若$\left|N(S)\cap S\right|=3$，这必导致$N(S)=V$，矛盾。

综上所述，结论成立。

参考文献:
［1］CHARTRAND G,LESNIAK L. Graphs and digraphs［M］. 3 rd ed. London:Chapman & Hall,1996:1-106.
［2］JA BONDY, USR MURTY. Graph theory with application［M］. New York: Elsevier Science Publishing Company, 1976: 1-65.
［3］邓毅雄. 图的相对结合数［J］. 华东交通大学学报,1995,12(1):92-96.
［4］邓毅雄. 图的相对结合数的进一步结果［J］. 华东交通大学学报,1997,14(1):64-69.

Two Results about Construction and Relative Binding Number of Graphs

Deng Yixiong[1], Zeng Aixiang[2]

(1. School of Software, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Xanhu School of Xingan, Jiangxi Ji'an, 330013, China)

Abstract: Based on the research has been done, the paper further discusses the relationship between relative binding number and structure of graph, The result has been obtained in the condition that $rb(G)=n-6$ and $rb(G)=4-n$.

Key words: graph; connected graphs; relative binding number; construction of graph