文章编号:1005-0523(2013)04-0014-05

在纠缠量子系统中的图像几何形状存储和检索

黎海生,周日贵

(华东交通大学信息工程学院,江西 南昌 330013)

摘要:图像几何形状的分割是基于图像内容的搜索的关键技术,为了提高基于图像内容的搜索的高效性和准确性,可以预先存储图像的几何形状。该文介绍了用最大纠缠的量子态来表示几何形状,设计了量子线路实现几何形状的存储,并提出了改进的几何形状存储和检索方法。

关键词:量子图像处理;图像储存与检索;量子纠缠

中图分类号:TP301.6;O413.1 **文献标志码**:A

量子计算[1]具有量子相干性、纠缠性以及量子态叠加性等固有特性,这种独特的计算性能引起了广泛关注,迅速成为国际上研究的热点。事实上,利用这种独特的性质,Shor设计了多项式加速整数的因式分解和离散对数算法[2],Deutsh利用量子并行性和量子相干实现信息并行计算[3],Grover的无序数据搜索算法实现二次加速[4],这些算法至今都是经典算法无法逾越的。

为了从真实的世界抽取出信息,对图像处理领域的研究者来说,可视信息的存储、处理与检索是第一顺序的任务。在经典的计算机中,图像的像素和坐标是用相互无关联的bit位存储,因此存储图像需要很大的存储空间,并且对图像并行处理比在量子系统中更困难。为了提高存储能力和计算性能,可采用量子计算和图像处理相结合的技术——量子图像处理。近年来,一些量子图像处理的算法被提出,在量子系统中,可以用颜色的物理特性频率而不需要按RGB模式或HIS模式来表示颜色,这样就可以仅仅用1-qbit量子态来存储一个颜色[5]。文献[6]提出用一组量子态表示颜色,并讨论了如何检索出一幅存在量子系统中的图像,文献[7]提出一个量子变换的加密和解密算法。量子计算能被量子门实现,文献[8-9]显示通用的量子门能够表示成一位量子门和二位量子门的组合。

在量子系统中,纠缠是一种非常重要的资源[10],文献[11]通过使用最大纠缠的量子态来表示图像的多边行几何形状的顶点,因此能够重建一幅图像而不需要存储另外的附加信息。本文改进了文献[11]中的几何形状存储和检索方法,并用量子线路实现图像的存储。

1 基本的量子门

在量子计算中,一个量子态可用希尔伯特空间的一个矢量来表标记,狄拉克用符号$|\ \rangle$和$\langle\ |$来标记右矢和左矢。$|v\rangle$和$\langle v|$是量子系统中的一对厄密特共轭态,它们被定义如下

$$|v\rangle=\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix},\ v_i\in C,\ i=0,1,\cdots,n-1,\ \langle v|=|v\rangle^+=\begin{bmatrix} v_0^+ & v_1^+ & \cdots & v_{n-1}^+ \end{bmatrix}。$$

符号$\otimes$表示矩阵的张量积,可定义如下

收稿日期:2013-06-22

基金项目:教育部人文社科项目(12YJAZH050);教育部科学技术研究重点项目(212094)

作者简介:黎海生(1974-),男,讲师,博士研究生,研究方向为量子图像处理与量子计算。

$|u\rangle=\begin{bmatrix}u_0\\u_1\\\vdots\\u_{n-1}\end{bmatrix}$, $u_i\in C, i=0,1,\cdots,n-1$, $|u\rangle\otimes|v\rangle=\begin{bmatrix}u_0v\\u_1v\\\vdots\\u_{n-1}v\end{bmatrix}$ 是 $n^2\times1$ 的向量。 $|u\rangle\otimes|v\rangle$ 也可以表示成 $|u\rangle|v\rangle$ 或 $|uv\rangle$ 。

在二维希尔伯特空间(也被称为一个量子位qubit)的量子叠加态可表示为 $|\psi\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle$,其中 $|a|^2+|b|^2=1$,两个计算基 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的矩阵表示是

$$|0\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ |1\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

在量子计算中,通过对量子状态进行一系列的酉变换来实现某些逻辑变换功能,因此,在一定时间间隔内实现逻辑变换的量子装置,被称为量子门。图1是本文要用到的一些量子门的符号标识和矩阵表示。假设 C_a 是一个在图1中的N qubit受控非门, C_a 的功能为

$$C_a|i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n\rangle=|i_1i_2\cdots i_{n-1}\rangle|\overline{i_n}\rangle$$

$$C_a|j_1\cdots j_n\rangle=|j_1\cdots j_n\rangle\text{ ,当 }|j_1\cdots j_n\rangle\neq|i_1\cdots i_n\rangle$$

其中, $i_1,i_2,\cdots i_{n-1},i_n\in\{0,1\}$, $\overline{i_n}=1-i_n$ 。

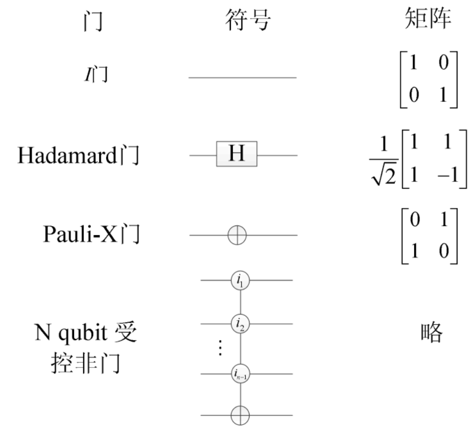

图1 一些量子门的符号与它们对应的矩阵

Fig.1 The notations of some quantum gates with their corresponding matrices

2 图像几何形状的存储

基于图像内容(例如图像中物体的几何形状)的搜索是有巨大潜力的研究领域[12],为了高效准确的搜索出想要的图像,那么图像分割是非常关键的技术。经典计算机中有很多好的分割算法,如snake-和区域增长。但要实现好的效果,分割算法将花费比较多的时间。为了提高基于图像内容的搜索的高效性和准确性,我们先用经典分割算法对图像处理,将图像中的几何形状的物体分割出来,对于某些特殊图像(例如图像中的物体有重叠的部分),我们可以采用人机交互的方式,比如用Photoshop软件将物体形状分割出来,然后存储到量子系统中。这是我们用纠缠量子态存储图像几何形状的动机。

2.1 图像几何形状的表示

Venegas使用将简单二进制图像(图像只有黑白两种颜色)的几何形状表示成最大纠缠的量子态[11],我们简单描述如下:

最大纠缠的 n 粒子量子态 $|GHZ\rangle^n$ 定义如下

$$|GHZ\rangle^n=\frac{|0\rangle^{\otimes n}+|1\rangle^{\otimes n}}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

式中: $|0\rangle^{\otimes n}$ 表示 $|0\rangle$ 的 n 次张量积。例如4粒子量子态 $|GHZ\rangle^4=2^{-1/2}(|0000\rangle+|1111\rangle)$ 。假设我们用 m qubits的二维量子阵列作为存储器,那么这个存储器的初始态可表示为

$$|\psi_{\text{initial}}\rangle=\bigotimes_{i=1}^{m}|0\rangle_i$$

式中: $i\leftrightarrow(x,y)$,按照先行后列的顺序将 r 行 c 列的二维阵列变成一个一维阵列,即

$$i=(x-1)\times c+y\ ,\ x\in[1,r]\ ,\ y\in[1,c] \tag{2}$$

用一个量子组合态可表示图2中的一幅 5×5 的图像

$$\left|\psi_{25}\right\rangle=\bigotimes_{i=1, i \in B}^{25}|0\rangle_i \otimes|GHZ\rangle_{1,4,16,19} \otimes|GHZ\rangle_{7,10,22,25} \quad (3)$$

其中 $B=\{i \mid i \neq 1,4,5,10,16,19,23,25\}$。

由于 $(1,1),(1,4),(4,1),(4,4)$ 是图2中一个四边形的顶点，可以用4粒子 GHZ 态表示为

$$|GHZ\rangle_{1,4,16,19}=\frac{|0000\rangle_{1,4,16,19}+|1111\rangle_{1,4,16,19}}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

另一个四边形可用另外一个4粒子 GHZ 态表示

$$|GHZ\rangle_{7,10,22,25}=\frac{|0000\rangle_{7,10,22,25}+|1111\rangle_{7,10,22,25}}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

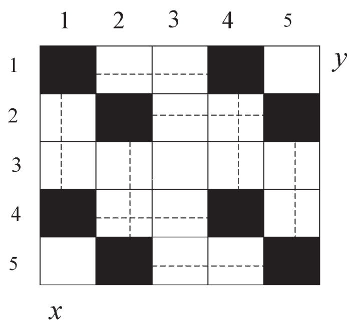

图2 一幅 5×5 的图像(虚线连接的形状是两个四边形)
Fig.2 An 5×5 image (the shapes connected by dotted lines are two quadrilaterals)

2.2 量子线路实现

我们用图1中的量子门设计出一个量子线路将图像几何形状存储到量子系统。将图3中的量子线路作用在初态 $|0\rangle^{\otimes n}$ 上，可生成最大纠缠的 n 粒子量子态(见公式(1))。将图4中的量子线路作用在初态 $\left|\psi_{\text{initial}}\right\rangle=\otimes_{i=1}^{25}|0\rangle_i$ 上，可以生成公式(3)中的量子态 $\left|\psi_{25}\right\rangle$，即通过量子线路将图2中的 5×5 的图像存储到量子系统。图4中虚线框1和2分别实现公式(3)和(4)。

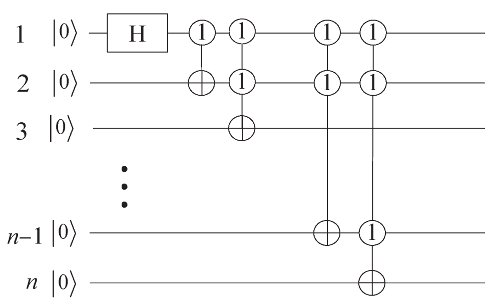

图3 n 粒子量子态 $|GHZ\rangle$ 的实现
Fig.3 The achievement of n particle quantum state $|GHZ\rangle$

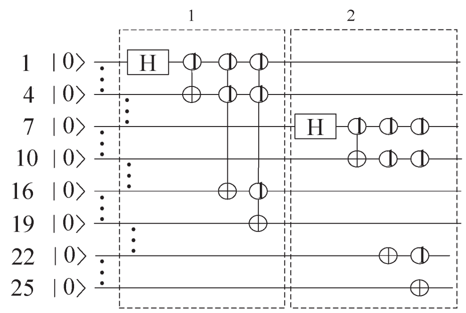

图4 量子线路实现图2中的 5×5 的图像
Fig.4 The quantum circuit realization of the 5×5 image in Fig.2

3 改进的几何形状的存储与检索方法

n 粒子的贝尔型(Bell-type)不等式可以判断这 n 个粒子是否是处于 n 粒子最大纠缠态[13]，文献[11]用这个方法检索出最大纠缠态，但要知道一些关于量子系统中图像的大小、几何形状的个数以及各个几何形状的类型的先验知识，这些信息可以存储在另一个量子阵列。假设要检索出图2中的两个四边形，利用贝尔型不等式来判断四个粒子是否处于最大纠缠，总共需要 $C_{25}^4\times C_{21}^4$ 次检测。为了减少先验知识的信息量及检测的次数，我们改进文献[11]中的存储和检索方法。

3.1 改进的几何形状的存储方法

我们可以将先验知识的信息减少到只存储 $2+m$ 个数 $n_x, n_y, s_1, s_2, \cdots, s_m$，这些数的含义是图像的大小为 $n_x\times n_y$，总共有 m 个几何形状，各个几何形状的顶点数分别是 $s_1, s_2, \cdots, s_m$。假设我们知道某幅图像的先验知识是 $8,8,8,8$。利用贝尔型不等式检测出一个8粒子的最大纠缠态，但这并不一定能得出正确的形状，因为8个顶点可以构成多个不同的多边形，图5列出了3种可能的几何形状。

因此，我们采用如下的存储策略来使检测出来的形状唯一：假设要存储的形状为闭合路径 $s_0 s_1 s_2 \cdots s_m s_0$($s_0$ 为起始点，s_0 的坐标 $(x_0, y_0)\leftrightarrow i$ 是这些点中的最小值)，并且 $d(s_0,s_1)<d(s_0,s_m)$，其中距离 $d(s_i,s_j)$ 定义为

$$d(s_i,s_j)=\sqrt{\left|x_i-x_j\right|^2+\left|y_i-y_j\right|^2} \tag{6}$$

由公式(2)计算得到 j,使得对于所有 $i\neq j$,$d(s_0,s_j)\leqslant d(s_0,s_i)$。如果 $j\neq 1$,我们在 $s_0\rightarrow s_1$ 直线上增加一个点 s_0^1,使得 $d(s_0,s_j)-1\leqslant d(s_0,s_0^1)<d(s_0,s_j)$。如果 $d(s_0^1,s_1)$ 不是 $\min\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m-1\}} d(s_0^1,s_j)$,其中 min 是取最小值的运算符,那就在 $s_0^1\rightarrow s_1$ 直线上再增加一个点 s_0^2,使得 $\min\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m-1\}} d(s_0^1,s_j)-1\leqslant d(s_0^2,s_1)<\min\limits_{j\in\{1,2,\cdots,m-1\}} d(s_0^1,s_j)$,继续这个过程,我们得到新的闭合路径 $s_0s_0^1\cdots s_0^{m_0}s_1s_2\cdots s_ms_0$。然后将 s_1 作为路径 $s_1s_2\cdots s_ms_0$ 的起始点,继续上述的过程,直到 s_{m-1} 作为路径 $s_{m-1}s_ms_0$ 的起始点,最终生成新的闭合路径

$$s_0s_0^1\cdots s_0^{\lambda_0}s_1s_1^1\cdots s_1^{\lambda_1}\cdots s_{m-2}s_{m-2}^1\cdots s_{m-2}^{\lambda_{m-2}}s_{m-1}s_ms_0 \tag{7}$$

将(7)中的路径的点作为形状的顶点表示成最大纠缠态,并通过量子线路存储在量子系统中,然后检测出这个最大纠缠态,并将 s_0 为起始点,然后选择距离最小的点(假设为 s_1)作为它的下一个点,并将 s_1 作为新的起始点,继续选取距离最小的点作为下一个新的起始点,最终得到一个闭合路径就是所需的几何形状。将图5中间的几何形状用改进的方法重新表示在图6中。

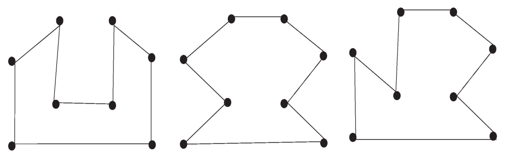

图5　相同顶点的3种可能的几何形状(不能出现交叉线)
Fig.5　Three possible geometrical shapes with same vertexes

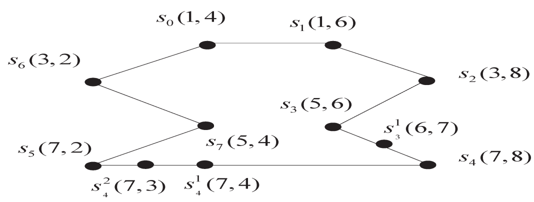

图6　用改进后的储存方法表示几何形状
Fig.6　Representing geometrical shape by using improved storage method

3.2　改进的几何形状的检索方法

采用增加最大纠缠的粒子数来保证检索出来的形状无二义性,但这对有些图像将增加检测的次数。因此提供第二种检索方法:当图像中的形状的个数不多时,采用直接测量的方式。

定义投影测量中的可观测量算子 $M_1=\sum_{j=0}^{2^n-1}m_jP_j$,$P_j=(|j\rangle\langle j|)$,其中 $j=j_1j_2\cdots j_n$ 是 j 的二进制展开,也就是说,$|j\rangle$ 是 $|j_1\rangle|j_2\rangle\cdots|j_n\rangle$ 的简练写法。然后用可测量算子 M_1 去测量量子态 $\left|\psi_{n_x\times n_y}\right\rangle$,得到 m_j 的概率为 $p(m_j)=\left\langle\psi_{n_x\times n_y}\middle|P_j\middle|\psi_{n_x\times n_y}\right\rangle$,即得到 $|j\rangle$ 的概率为 $p(m_j)$。依据先验知识,知道量子系统中的量子态为

$$\left|\psi_{n_x\times n_y}\right\rangle=\bigotimes_{i=1,i\notin B}^{n_x\times n_y}|0\rangle_i\otimes|GHZ\rangle_{s_1}\otimes|GHZ\rangle_{s_2}\otimes\cdots\otimes|GHZ\rangle_{s_m} \tag{8}$$

其中 B 是 m 个形状的顶点集合。

由 $|GHZ\rangle$(见公式(1))的特性,通过 M_1 测量得到 $|j\rangle$,$j=j_1j_2\cdots j_n$ 中1的个数为 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 的概率均为 2^{-m},因此能以100%的概率检索出 m 个最大纠缠态,测量次数的期望 μ 是 $\mu=2^m$。当 m 较小而 $s=n_x\times n_y$ 较大时,$2^m\ll C_s^{s_1}C_{s-s_1}^{s_2}\cdots C_{s-s_1-s_2-\cdots-s_{m-1}}^{s_m}$。为了使上面的描述更清楚,我们以图2中的图像为例。当形状为四边形时,3.2节中改进的存储方法并不增加最大纠缠态的粒子数,因此先验知识是5,5,4,4,以100%的概率测量出2个4粒子的最大纠缠态的测量次数的期望是4,而用贝尔型不等式测量需要75 710 250次测量。

4　结论

设计了实现图像形状存储的量子线路,并改进了文献[11]中的存储方法,只需存储少量的先验知识,

就可以准确的检索出图像几何形状，并根据先验知识，可以选择用贝尔型不等式检测还是直接用投影测量算子直接测量。对于图像中的几何形状个数较少而图像的像素较多，用直接测量的次数远远小于用贝尔型不等式测量的次数。

参考文献：

［1］FEYNMAN R P. Simulating physics with computers［J］. International J Theoretical Physics，1982，21：467-488.

［2］SHOR P W. Algorithms for quantum computation：discrete logarithms and factoring［C］//Proceedings of the 35th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science，Washington：Proceedings of IEEE，1994：124-134.

［3］DEUTSCH D. Quantum theory，the Church-Turing principle and the universal quantum computer［J］. Proc R Soc London A，1985，400：97-117.

［4］GROVER L K. A fast quantum mechanical algorithm for database search［C］//Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing，New York：ACM，1996：212-219.

［5］VENEGAS-ANDRACA S E，BOSE S. Storing，processing and retrieving an image using quantum mechanics［J］. Proc SPIE Conf Quantum Information and Computation. 2003，5105：137-147.

［6］LI HAISHENG，ZHU RIGUI，SONG LAN，et al. Image storage，retrieval，compression and segmentation in a quantum system［J］. Quantum Inf. Process，2013，12：2269-2290.

［7］ZHOU RIGUI，WU QIAN，ZHANG MANQUN. Quantum image encryption and decryption algorithms based on quantum image geometric transformations［J］. International J Theoretical Physics，2013，52（6）：1802-1817.

［8］NIELSEN M A，CHUANG I L. Quantum computation and quantum information［M］. Cambridge：Cambridge University Press，2000：188-200.

［9］BARENCO A，BENNETT H C. Elementary gates for quantum computation［J］. Phys Rev A，1995，52：3457-3467.

［10］周正威，郭光灿. 量子信息讲座续讲 第三讲 量子纠缠态［J］. 物理，2010，9（11）：695-699.

［11］VENEGAS-ANDRACA S E，BALL J L. Processing images in entangled quantum systems［J］. Quantum Inf Process，2010，9（1）：1-11.

［12］DATTA R，JOSHI D，LI J，et al. Image retrieval：ideas，influences，and trends of the new age［J］. ACM Computing Surveys，2008，40（2）：5.

［13］SEEVINCK M，SVETLICHNY G. Bell-type inequalities for partial separability in N-particle systems and quantum mechanical violations［J］. Phys Rev Lett，2002，89（060401）：1-4.

Storage and Retrieval of Image Geometry Shapes in Entangled Quantum Systems

Li Haisheng，Zhou Rigui

（School of Information Engineering，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China）

Abstract：The segmentation of image geometrical shapes is a key technology in content-based image search. In order to improve the efficiency and accuracy of content-based image search，image geometrical shapes may be stored in advance. The paper describes that geometrical shapes are represented by maximally-entangled quantum states，and designs a quantum circuit to achieve geometrical shapes storage. Moreover，improved methods of storage and retrieval for geometrical shapes are proposed.

Key words：quantum image processing；image storage and retrieval；quantum entanglement