DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2014.05.001

第31卷第5期 华东交通大学学报 Vol. 31 No. 5
2014年10月 Journal of East China Jiaotong University Oct., 2014

文章编号:1005-0523(2014)05-0117-05

图$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,\cdots,r_{4g,4h+2})$-冠的优美性

张 政,胡红亮

(西安航空学院理学院,陕西 西安 710077)

摘要: 给出了$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,\cdots,r_{4g,4h+2})$-冠的定义,讨论了$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,\cdots,r_{4g,4h+2})$-冠的优美性,用构造性的方法给出了一些特殊的$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,\cdots,r_{4g,4h+2})$-冠的优美标号。证明了一些特殊的$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,\cdots,r_{4g,4h+2})$-冠是交错图。

关键词: 圈;冠;优美图;交错图

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A

1 引言与概念

优美图是图论中极有趣的研究课题,有着较好的应用价值和广阔的研究前景。它的研究是从1963年G Ringel提出的一个猜想和1966年A Rosa的一篇论文开始的。1972年,S W Golomb明确给出了优美图的定义。近几十年,国内外获得不少关于优美图的研究成果,它们被应用于射电天文学,X-射线衍射晶体学,密码设计,通信网络编址,导弹控制码设计,同步机码设计等领域。

文中所讨论的图均为无向简单图,$V(G)$和$E(G)$分别表示图G的顶点集和边集,未说明的符号及术语均见文[1]。

定义1[1] 对于一个简单图$G=V(G),E(G)=(V,E)$,如果对每一个顶点$v\in V$,存在一个非负整数$\theta(v)$(称为顶点v的标号)使满足:

① $\forall u,v\in V$,若$u\neq v$,则$\theta(u)\neq\theta(v)$。② $\max\{\theta(v)|v\in V\}=|E|$。③ $\forall e_1,e_2\in E$,若$e_1\neq e_2$,则$\theta'(e_1)\neq\theta'(e_2)$。其中:$\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$,$e=uv$(称$\theta'(e)$为边$e$的标号),则$G$称为优美图,$\theta(v)$称为$G$的一个优美标号。

定义2[1] 在图G每个顶点都粘接了r条悬挂边($r\geqslant 1$的整数)所得到的图,称为图G的r-冠,图G的1-冠,称作图G的冠。

定义3 $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$的每个顶点$v_i$都粘接了$r_i$条悬挂边($r_i\geqslant 0$的整数,$i=1,2,\ldots,n$)所得到的图,称为图$G$的$(r_1,r_2,\ldots,r_n)$-冠,简记为$G(r_1,r_2,\ldots,r_n)$。特别地,当$r_1=r_2=\ldots=r_n=r$时,称为图$G$的$r$-冠。图$G$的0-冠就是图$G$。

定义4[1] 由圈C_m和C_n恰有一个公共点所组成的图记为图$\omega_{m,n}$。

定义5[2] G是一个优美二部图,其优美标号为θ,$V(G)$划分成两个集合X,Y,如果$\max\limits_{v\in X}\theta(v)<\min\limits_{v\in Y}\theta(v)$,则称$\theta$是$G$的交错标号,称$G$是在交错标号$\theta$下的交错图。

文献[1]中证明了$P_1\vee P_n$及其r-冠是优美的,从而猜测:任意优美图的r-冠都是优美的,在此猜想的指导下,文献[3-5]中证明了:当$n\equiv 0,3(\mathrm{mod}\,4)$时,图$C_n$及其$r$-冠是优美图;文献[6-8]中给出了图$C_n$的

收稿日期: 2014-06-23
基金项目: 国家自然科学基金(11171273)
作者简介: 张政(1981—),男,讲师,研究方向为图论及其应用。

$(r_1,r_2,\ldots,r_n)$-冠的定义，讨论了 $n=3,7,8,11,4h,4h+3$ 时，图 C_n 的 $(r_1,r_2,\ldots,r_n)$-冠的优美性；文献[10-12]给出了 $\omega_{m,n}$ 的 $(r_1,r_2,\ldots,r_{m+n-1})$-冠的定义，讨论了 $(m,n)=(4,4),(4,6),(5,6),(5,7)$ 时，图 $\omega_{m,n}$ 的 $(r_1,r_2,\ldots,r_{m+n-1})$-冠的优美性。本文证明了图 $\omega_{4g,4h+3}$ 的 $(r_1,r_2,\ldots,r_{4g+4h+2})$-冠的优美性，并给出了4种不同的优美标号，同时证明了这些优美标号也是交错标号。

2 主要结果及其证明

定理 当 $m=4g$，$n=4h+3$，g 和 h 为任意自然数，r_i 为任意非负整数（$i=1,2,\ldots,m+n-1$），图 $\omega_{m,n}$ 的 $(r_1,r_2,\ldots,r_{m+n-1})$-冠的顶点集如图1所示，$V(\omega_{m,n})=(v_1,v_2,\ldots,v_m,v_{m+1},\ldots,v_{m+n-1})$，与 v_i 邻接的悬挂边（或叶）记为 x_{ij}（$v_i\in V(\omega_{m,n})$，$j=1,2,\ldots,r_i$），当 $\sum_{i=1}^{g}r_{2i}=\sum_{i=1}^{g}r_{4g-2i+1}$，$\sum_{j=1}^{h+1}r_{4g+2j-1}=\sum_{j=0}^{h}r_{4g+4h+2-2j}$ 时，$\omega_{m,n}$ 的 $(r_1,r_2,\ldots,r_{m+n-1})$-冠是优美图且为交错图。

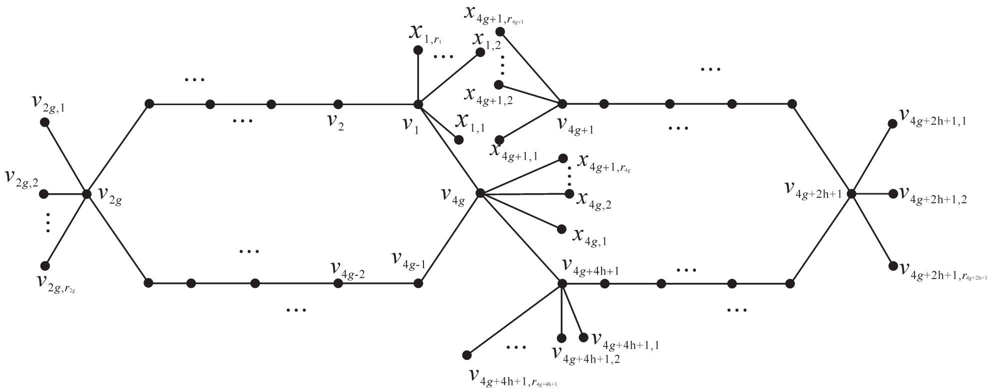

图1 $\omega_{4g,4h+3}$ 的 $(r_1,r_2,\ldots,r_{4g+4h+2})$-冠

Fig.1 The $(r_1,r_2,\ldots,r_{4g+4h+2})$-corona of the graph $\omega_{4g,4h+3}$

第1种优美（交错）标号：

$\theta(v_{2i-1})=i-1+\sum_{k=1}^{i}r_{2k-2}\ i=1,2,3,\ldots,2g+2h+1$（令 $r_0=0$），

$\theta(v_{2i})=4g+4h+4-i+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}$，$i=1,2,\ldots,g$，

$\theta(v_{2i})=4g+4h+3-i+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}$，$i=g+1,g+2,\ldots,2g+h$，

$\theta(v_{2i})=4g+4h+2-i+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}$，$i=2g+h+1,2g+h+2,\ldots,2g+2h+1$。

当 $r_j=0$ 时，$\theta(x_{j,i})=\theta(v_j)$，$j=1,2,\ldots,4g+4h+2$。

当 $r_j\neq 0$ 时，$\theta(x_{1,i})=4g+4h+4+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-i$，$i=1,2,\ldots,r_1$，

$\theta(x_{j,i})=\theta(v_{j-1})-1+(-1)^j i$，$j=2g+1$，$i=1,2,\ldots,r_j$，

$\theta(x_{j,i})=\theta(v_{j-1})+(-1)^j i$，$j=2,3,\ldots,2g,2g+2,2g+3,\ldots,4g+4h+2$，$i=1,2,\ldots,r_j$。

容易验证：

$\theta:V$（$\omega_{4g,4h+3}$ 的 $(r_1,r_2,\ldots,r_{4g+4h+2})$-冠）$\rightarrow\left\{0,1,2,\ldots,4g+4h+3+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k\right\}$ 是一个单射。

$\theta'(v_jx_{j,i})=\left|\theta(v_j)-\theta(x_{j,i})\right|=4g+4h+5-j+\sum_{k=j}^{4g+4h+2}r_k-i$，$j=1,2,...,2g$，$i=1,2,...,r_j$，

$\theta'(v_jx_{j,i})=\left|\theta(v_j)-\theta(x_{j,i})\right|=4g+4h+4-j+\sum_{k=j}^{4g+4h+2}r_k-i$，$j=2g+1,2g+2,...,4g+2h+1$，$i=1,2,...,r_j$，

$\theta'(v_jx_{j,i})=\left|\theta(v_j)-\theta(x_{j,i})\right|=4g+4h+3-j+\sum_{k=j}^{4g+4h+2}r_k-i$，$j=4g+2h+2,4g+2h+3,\cdots,4g+4h+2$，$i=1,2,\cdots,r_j$，

$\theta'(v_{j+1}v_j)=\left|\theta(v_{j+1})-\theta(v_j)\right|=4g+4h+4-j+\sum_{k=j+1}^{4g+4h+2}r_k$，$j=1,2,...,2g$，

$\theta'(v_{j+1}v_j)=\left|\theta(v_{j+1})-\theta(v_j)\right|=4g+4h+3-j+\sum_{k=j+1}^{4g+4h+2}r_k$，$j=2g+1,2g+2,...,4g+2h+1$，

$\theta'(v_{j+1}v_j)=\left|\theta(v_{j+1})-\theta(v_j)\right|=4g+4h+2-j+\sum_{k=j+1}^{4g+4h+2}r_k$，$j=4g+2h+2,4g+2h+3,...,4g+4h+1$，

$\theta'(v_{4g+4h+2}v_{4g})=\left|\theta(v_{4g+4h+2})-\theta(v_{4g})\right|=2h+2+\sum_{k=2g+1}^{2g+2h+1}r_{2k-1}$，

$\theta'(v_{4g}v_1)=\left|\theta(v_{4g})-\theta(v_1)\right|=2g+4h+3+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-\sum_{k=1}^{2g}r_{2k-1}$。

当$\sum_{i=1}^{g}r_{2i}=\sum_{i=1}^{g}r_{4g-2i+1}$，$\sum_{j=1}^{h+1}r_{4g+2j-1}=\sum_{j=0}^{h}r_{4g+4h+2-2j}$，$r_i\geqslant 0(i=1,2,...,4g+4h+2)$时，

$\theta':E$（$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,...,r_{4g+4h+2})$-冠）$\rightarrow\left\{0,1,2,...,4g+4h+3+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k\right\}$是一个双射。

因此，θ是$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,...,r_{4g+4h+2})$-冠的优美标号。即$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,...,r_{4g+4h+2})$-冠是优美图。

令：$X=\left\{v_{j-1},x_{j,i}\left(j=2,4,...,4g+4h+2,i=1,2,...,r_j\right)\right\}$，$Y=\left\{v_{j+1},x_{j,i}\left(j=1,3,...,4g+4h+1,i=1,2,...,r_j\right)\right\}$，

满足：$\max_{v\in X}\theta(v)=2g+2h+\sum_{k=1}^{2g+2h+2}r_{2k-2}<\min_{v\in Y}\theta(v)=2g+2h+1+\sum_{k=1}^{2g+2h+2}r_{2k-2}$。

因此，θ是$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,...,r_{4g+4h+2})$-冠的交错标号。即$\omega_{4g,4h+3}$的$(r_1,r_2,...,r_{4g+4h+2})$-冠是交错图。

第2种优美（交错）标号：

$\theta(v_{2i-1})=i-1+\sum_{k=1}^{i}r_{2k-2}$，$i=1,2,...,g$（令$r_0=0$），

$\theta(v_{2i-1})=i+\sum_{k=1}^{i}r_{2k-2}$，$i=g+1,g+2,...,2g,2g+1,...,2g+2h+1$，

$\theta(v_{2i})=4g+4h+4-i+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}$，$i=1,2,...,2g+h$，

$\theta(v_{2i})=4g+4h+3-i+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}$，$i=2g+h+1,2g+h+2,...,2g+2h+1$。

当$r_j=0$时，$\theta(x_{j,i})=\theta(v_j)$，$j=1,2,...,4g+4h+2$。

当$r_j\neq 0$时，$\theta(x_{1,i})=4g+4h+4+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-i$，$i=1,2,...,r_1$，

$\theta(x_{j,i})=\theta(v_{j-1})+(-1)^j i$，$j=2,3,...,4g+4h+2$，$i=1,2,...,r_j$。

第3种优美（交错）标号：

$\theta(v_{2i-1})=i-1+\sum_{k=1}^{i}r_{2k-2}$，$i=1,2,...,2g+h+1$（令$r_0=0$），

$\theta(v_{2i-1})=i+\sum_{k=1}^{i}r_{2k-2}$，$i=2g+h+2,2g+h+3,...,2g+2h+1$，

$\theta(v_{2i})=4g+4h+4-i+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}$, $i=1,2,\dots,g$,

$\theta(v_{2i})=4g+4h+3-i+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}$, $i=g+1,g+2,\dots,2g+2h+1$ 。

当 $r_j=0$ 时, $\theta(x_{j,i})=\theta(v_j)$, $j=1,2,\dots,4g+4h+2$ 。

当 $r_j\neq 0$ 时, $\theta(x_{1,i})=4g+4h+4+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-i$, $i=1,2,\dots,r_1$,

$\theta(x_{j,i})=\theta(v_{j-1})-1+(-1)^j i$, $j=2g+1$, $i=1,2,\dots,r_j$,

$\theta(x_{j,i})=\theta(v_{j-1})+1+(-1)^j i$, $j=4g+2h+2$, $i=1,2,\dots,r_j$,

$\theta(x_{j,i})=\theta(v_{j-1})+(-1)^j i$, $j=2,3,\dots,2g,2g+2,\dots,4g+2h+1,4g+2h+3,\dots,4g+4h+2$, $i=1,2,\dots,r_j$ 。

第4种优美(交错)标号:

$\theta(v_{2i-1})=i-1+\sum_{k=1}^{i}r_{2k-2}$, $i=1,2,\dots,g$ (令 $r_0=0$),

$\theta(v_{2i-1})=i+\sum_{k=1}^{i}r_{2k-2}$, $i=g+1,g+2,\dots,2g,2g+1,\dots,2g+h+1$,

$\theta(v_{2i-1})=i+1+\sum_{k=1}^{i}r_{2k-2}$, $i=2g+h+2,2g+h+3,\dots,2g+2h+1$,

$\theta(v_{2i})=4g+4h+4-i+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}$, $i=1,2,\dots,2g+2h+1$,

当 $r_j=0$ 时, $\theta(x_{j,i})=\theta(v_j)$, $j=1,2,\dots,4g+4h+2$,

当 $r_j\neq 0$ 时, $\theta(x_{1,i})=4g+4h+4+\sum_{k=1}^{4g+4h+2}r_k-i$, $i=1,2,\dots,r_1$,

$\theta(x_{j,i})=\theta(v_{j-1})+1+(-1)^j i$, $j=4g+2h+2$,

$\theta(x_{j,i})=\theta(v_{j-1})+(-1)^j i$, $j=2,3,\dots,4g+2h+1,4g+2h+3,\dots,4g+4h+2$, $i=1,2,\dots,r_j$ 。

第2、3、4种优美交错标号的证明类似于第1种优美交错标号,此处略。

例 下面根据定理给出 $\omega_{8,11}$ 的 (1,2,3,2,3,1,1,2,2,1,3,2,1,2,1,2,3,2) -冠的4种交错标号,如图2~图5所示。

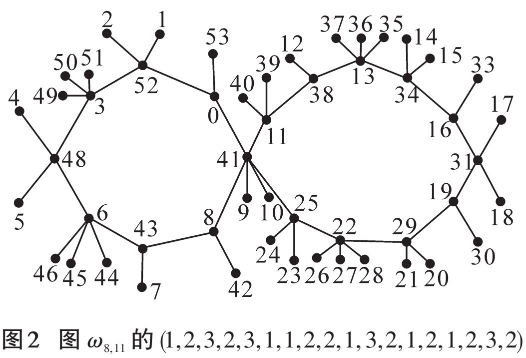

图2 图 $\omega_{8,11}$ 的 (1,2,3,2,3,1,1,2,2,1,3,2,1,2,1,2,3,2) -冠的第1种交错标号

Fig.2 The first alternating labeling of the (1,2,3,2,3,1,1,2,2,1,3,2,1,2,1,2,3,2) -corona of the graph $\omega_{8,11}$

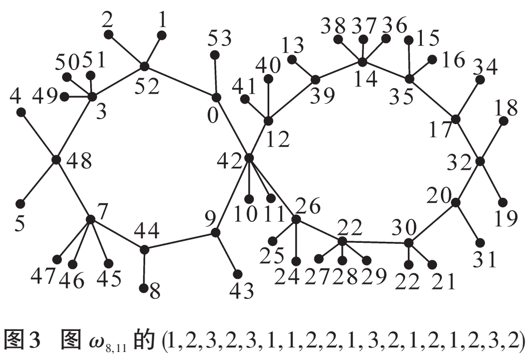

图3 图 $\omega_{8,11}$ 的 (1,2,3,2,3,1,1,2,2,1,3,2,1,2,1,2,3,2) -冠的第2种交错标号

Fig.3 The second alternating labeling of the (1,2,3,2,3,1,1,2,2,1,3,2,1,2,1,2,3,2) -corona of the graph $\omega_{8,11}$

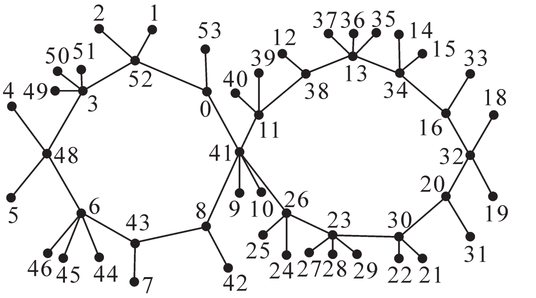

图4 图 $\omega_{8,11}$ 的(1,2,3,2,3,1,1,2,2,1,3,2,1,2,1,2,3,2)-冠的第3种交错标号

Fig.4 The third alternating labeling of the (1,2,3,2,3,1,1,2,2,1,3,2,1,2,1,2,3,2) **-corona of the graph** $\omega_{8,11}$

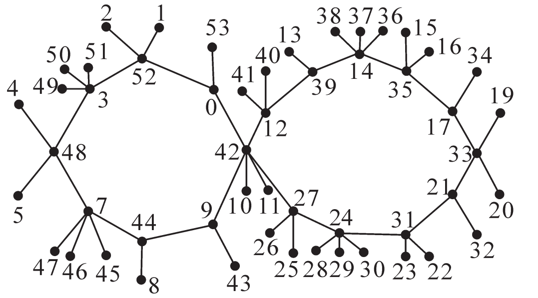

图5 图 $\omega_{8,11}$ 的 (1,2,3,2,3,1,1,2,2,1,3,2,1,2,1,2,3,2) -冠的第4种交错标号

Fig.5 The fourth alternating labeling of the (1,2,3,2,3,1,1,2,2,1,3,2,1,2,1,2,3,2) **-corona of the graph** $\omega_{8,11}$

参考文献:

[1] 马克杰.优美图[M].北京:北京大学出版社,1991:10-15.

[2] 杨显文,张志尚.一类交r错图并的优美性[J].吉林工程技术师范学院学报:自然科学版,2007,23(6):8-10.

[3] 武建春.图 $D_{2,4k}$ 与它的-冠的优美性[J].内蒙古电大学刊,2002(1):34.

[4] 曾朝英,武建春.关于优美图 C_n 和 $r¤k_1$ 的 r-冠的优美性[J].集宁师专学报 2000,22(4):4-7.

[5] 胡红亮.图 C_n 的 r-冠的新的优美标号[J].纯粹数学与应用数学[J]. 2010,26(3):454-457.

[6] 吴跃生,李咏秋.关于圈 C_n 的 $(r_1,r_2,...,r_n)$-冠($n=7,8$)的优美性[J].阜阳师范学院学报:自然科学版,2010,27(3):20-23.

[7] 吴跃生,李咏秋.再探圈 C_n 的 $(r_1,r_2,...,r_n)$-冠($n=7,8$)的优美性[J].阜阳师范学院学报:自然科学版,2010,27(4):1-4.

[8] 吴跃生.关于圈 C_{4h} 的 $(r_1,r_2,...,r_{4h})$-冠的优美性[J].华东交通大学学报, 2011,28(1):77-80.

[9] 曾朝英.图 $\omega_{4k,n}$ 的 r-冠的优美性[J].集宁师专学报,2001,23(4):4-6.

[10] 吴跃生,李咏秋.关于图 $\omega_{4,4}$ 的 $(r_1,r_2,...,r_7)$-冠的优美性[J].宜春学院学报, 2010,32(12):1-3.

[11] 吴跃生.关于图 $\omega_{4,6}$ 的 $(r_1,r_2,...,r_9)$-冠的优美性[J].宜春学院学报, 2011,33(8):1-3.

[12] 吴跃生,李咏秋.关于图 $\omega_{5,6}$ 的 $(r_1,r_2,...,r_{10})$-冠的优美性[J].北京联合大学学报,2011,25(2):60-61.

[13] 吴跃生,李咏秋.关于图 $\omega_{5,7}$ 的 $(r_1,r_2,...,r_{11})$-冠的优美性[J].嘉应学院学报, 2011,29(5):5-8.

[14] 吴跃生,王广富,徐保根.关于图 $C_{4h+1}\odot k_1$ 的 $(G_{r_1},G_{r_2},G_{r_3},...,G_{r_{4h+2}})$-冠的优美性[J].山东大学学报:理学版,2013,48(4):25-28.

On the Gracefulness of the $(r_1,r_2,...,r_{4g+4h+2})$-corona of the Graph $\omega_{4g,4h+3}$

Zhang Zheng, Hu Hongliang

(School of Science, Xi'an Aeronautical University, Xi'an 710077, China)

Abstract: A definition has been given for the $(r_1,r_2,...,r_{4g+4h+2})$-corona of the graph $\omega_{4g,4h+3}$. The gracefulness of the $(r_1,r_2,...,r_{4g+4h+2})$-corona of the graph $\omega_{4g,4h+3}$ is then discussed and the graceful labeling is presented in this paper. It also proves that some special $(r_1,r_2,...,r_{4g+4h+2})$-corona of the graph $\omega_{4g,4h+3}$ are of alternating graph.

Key words: cycle; corona; graceful graph; alternating graph