文章编号:1005-0523(2015)05-0093-06

二维表查找和双线性插值算法的设计与应用

莫林利[1],赵秀绍[2],郑　伟[2],王　旭[2]

(华东交通大学 1.软件学院; 2.土木建筑学院,江西 南昌 330013)

摘要:二维表查找及双线性插值计算在岩土工程中应用较多,用推导公式进行计算时工作量大且容易出错。以实际工程中求地基基本承载力为例,利用线性插值的基本原理,推导双线性插值的计算公式,其计算相对复杂。利用 TREND 函数可以线性拟合数据组的特性,分析当参数为两组数据拟合时,拟合直线正好通过由此两组数据形成坐标点,且线性拟合的相关系数为 1。因此可借助 TREND 函数进行线性插值计算,并设计了双线性插值 TREND 函数的实现算法。自动查表是利用 MATCH 函数查找双指标的插值区间,用 INDEX 函数确定合理的插值区域,配合 TREND 函数可以完成双指标的二维表自动查找和双线性插值。对二维表边界上的查找插值区间需要特殊处理,经特殊设计后可进行外延线性插值。论文设计并制作的计算表格方便可靠,可作为承载力查表插值的计算工具。

关键词: Excel 函数法; 二维表查找; 双线性插值; 外延插值

中图分类号:TP311;TU411　　**文献标志码**:A

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2015.05.014

双线性插值在测量[1-2]、物理[3-4]、岩土[5]、计算机图像[6-7]等方面有着广泛的应用,是二维空间中最简单和最实用的插值计算方法。许多学者建立解决实际问题的二维插值数学模型,例如王军讨论了基于双线性内插模型的高程异常值获取的方法[1],通过内插模型建立高精度、高分辨率的区域高程异常数字模型,从而内插出该区域内任何一点或一小片区域的高程异常值。传统进行复杂双线性插值计算时一般利用计算机语言编程实现,但存在着对于变化的实际问题无法变更源程序的不便。Excel 有着强大的计算功能,在工业建筑、土工试验方面有着不可比拟的计算优势[8-12],许多复杂或繁杂的数值计算可以通过 Excel 内部函数或公式来实现。

在岩土工程中,许多土工试验、土力学计算都涉及到二维表查询并进行双线性插值计算,例如第四系粉土、粘性土和粉质粘土地基承载力、利用布辛奈斯克求解半无限空间的应力,均是应用二维表格进行查表计算。当要查询的值正好在表格中时,可轻易的查得对应的承载力或竖向应力。当要查的双指标中有一个指标不是表中值时,为一维线性插值问题;当要查的双指标均不在表中时,为双线性插值。双线性插值时,一般要进行三次一维插值才能解决问题,计算工作量大,许多现场工作者采用估值法进行插值,估值因人而异,造成双线性插值非唯一性。因此,设计能够自动进行二维表查询和线性插值计算的 Excel 表格,是快速查表求解地基承载力的有力工具,也能给其它二维表查询和线性插值提供有价值的参考方法。

1　工程实际问题

以《铁路桥涵规范》中对于第四纪(Q_4)冲洪积粘土求解承载力为例,其相关数据已经录入 Excel 数据表中,如表 1 所示,其中 A 列为孔隙比值,第 1 行为液性指数值,其承载力值如表 1 中 $B2$ 到 $N8$ 单元格区域所示。

收稿日期:2015-04-29

基金项目:国家自然科学基金项目(51208198);江西省教育厅基金项目(JXJG-13-5-15);华东交通大学校立科研基金(12RJ02)

作者简介:莫林利(1977—),女,讲师,主要研究方向为计算机在岩土工程中的应用。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表1 第四纪冲洪积土承载力Excel数据

Tab.1 Soil bearing capacity data for Q_4 alluvial soil

行	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	$e\backslash I_L$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
2	0.5	450	440	430	420	400	380	350	310	270	240	220	–	–
3	0.6	420	410	400	380	360	340	310	280	250	220	200	180	–
4	0.7	400	370	350	330	310	290	270	240	220	190	170	160	150
5	0.8	380	330	300	280	260	240	230	210	180	160	150	140	130
6	0.9	320	280	260	240	220	210	190	180	160	140	130	120	100
7	1	250	230	220	210	190	170	160	150	140	120	110	–	–
8	1.1	–	–	160	150	140	130	120	110	120	90	–	–	–

注:表中阴影部分,A~N为Excel表中的列编号,1~8为行编号。

某工程地基为Q_4冲洪积土,地下水位在地表下2 m处,水位以下含水率w=32%,土粒比重G_S=2.68,土的液限w_L=40%,土的塑限w_P=18%,地下水位以上土体重度γ=18 kN·m^{-3},宽度4 m的条形基础埋置于地表下5 m处,按《铁路桥涵规范》确定该地基承载力。

对于此类问题,首先根据土力学中公式计算e和I_L,计算公式如式(1)和式(2)所示

$$e=\frac{G_S W}{S_r}=\frac{2.68\times 32\%}{100\%}=0.858 \tag{1}$$

$$I_L=\frac{w-w_P}{w_L-w_P}=0.636 \tag{2}$$

很显然,所得孔隙比e和液性指数I_L均不能在表1所示的数据表中直接查出。许多现场工作者认为插值计算公式(见式(6))计算量大因而一般会利用表1中的值估算一个承载力,而估值因人而异,可能造成承载力求解不够准确。

2 插值计算的数学模型

设要查表的e_3在e_1和e_2之间,I_{L3}在I_{L1}和I_{L2}之间,与承载力相关关系如表2所示。

表2 孔隙比、液性指数与承载力对应关系

Tab.2 Correspondence between void ratio, liquid index and bearing capacity

孔隙比	液性指数	
	I_{L1}	I_{L2}
e_1	f_1	f_3
e_2	f_2	f_4

如图1所示,当液性指数I_{L1}不变时,已知孔隙比e_1值对应的承载力为f_1,孔隙比e_2对应的承载力为f_2,求孔隙比e_3对应的承载力f_5。

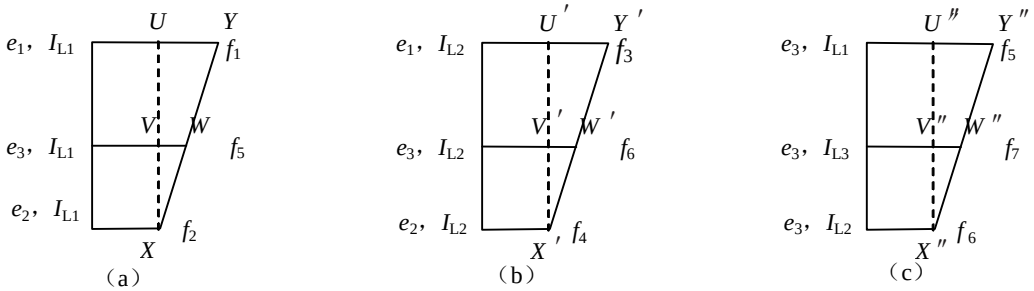


图1 二维插值原理图

Fig.1 Principle diagram for two-dimensional interpolation

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在图 1(a)中，$e_2>e_3>e_1$，可知 $\triangle XVW \backsim \triangle XUY$，可得式(3)

$$\frac{VW}{UY}=\frac{f_5-f_2}{f_1-f_2}\frac{XV}{XU}=\frac{e_2-e_3}{e_2-e_1} \qquad f_5=\frac{(f_1-f_2)\times(e_2-e_3)}{e_2-e_1}+f_2 \tag{3}$$

可以证明，当 $e_3<e_1$ 或 $e_3>e_2$ 时，用式(3)计算结果仍然正确，式(3)即为求解线性插值的通用公式。同理根据图 1 中(b)可得式(4)

$$f_6=\frac{(f_3-f_4)\times(e_2-e_3)}{e_2-e_1}+f_4 \tag{4}$$

根据式(3)和式(4)可得 e_3，I_{L1} 时承载力为 f_5，e_3、I_{L2} 时承载力为 f_6。此时设孔隙比 e_3 不变，I_{L3} 在 I_{L1} 与 I_{L2} 之间插值，则仍根据线性插值计算方法和表 1 可得 f_7，如式(5)

$$f_7=\frac{(f_5-f_6)\times(I_{L2}-I_{L3})}{I_{L2}-I_{L1}}+f_6 \tag{5}$$

则 f_7 即为 e_3、I_{L3} 时对应的承载力，把式(3)和(4)代入式(5)可得线性插值通式如式(6)所示

$$f_7=\frac{\left(\frac{(e_2-e_3)(f_1-f_2-f_3+f_4)}{e_2-e_1}+f_2-f_4\right)\times(I_{L2}-I_{L3})}{I_{L2}-I_{L1}}+f_6 \tag{6}$$

当计算 e_3=0.858，I_{L3}=0.636 对应的承载力 f_7 时，利用表 1 和式(6)进行二维插值计算，查表 1 可得查找的最近区域为 e_1=0.8，e_2=0.9，I_{L1}=0.6，I_{L2}=0.7；对应的承载力为 f_1=230，f_2=190，f_3=210，f_4=180，代入式(6)可得 f_7=201.688 kPa，f_7 就是此地基的基本承载力。然后根据深度和基础宽度修正可得地基的容许承载力，此处不再详述。

3　插值函数原理与 Excel 实现

3.1　TREND 函数线性插值原理

利用公式(6)进行线性插值时每次均要进行公式推导，计算工作量大且易出错。此时利用 Excel 中 TREND 函数实现自动插值计算，将大大减少计算工作量且语法明确。TREND 函数用途是：返回一条线性回归拟合线的一组纵坐标值(y 值)，即找到适合给定的数组 *known_y's* 和 *known_x's* 的直线，并返回指定数组 *new_x's* 值在直线上对应的 y 值。TREND 函数语法为

TREND *known_y's*，*known_x's*，*new_x's*，*const*

如图 2 所示，当 TREND 函数所用参数数组仅有两组数据 x_1、x_2 和 y_1、y_2 时，则其返回的线性拟合的直线一定是由 $m(x_1,y_1)$和 $n(x_2,y_2)$两点所连的直线，且其拟合的相关系数 R^2=1。当所求第 3 点 C 点的横坐标为 x_3 时，则函数返回值即为 o 点的纵坐标 y_3，即 o 点是由 m 点和 n 点线性插入的。实现上述计算的公式为"=TREND({y_1,y_2},{x_1,x_2},x_3)"，在 Excel 中大括号代表数组。

3.2　TREND 函数双线性插值设计

在具体应用于线性插值时，*known_y's*、*known_x's* 两个参数必须是数组或 Excel 连续单元格引用。因此必须将要线性插值的原始数据布置到相邻的单元格。根据表 1 可得，e_3=0.858 的位置在 0.8~0.9（表中列表值）之间，I_{L3}=0.636 在 0.6~0.7 之间，则对应的 f_1=230 kPa，f_2=190 kPa，f_3=210 kPa，f_4=180 kPa，数据如图 3 中 *R5*~*T7* 区域所示。

计算 e_3=0.858，I_{L1}=0.6 时的承载力 f_5 的方法为：在 *S8* 单元格中输入公式(7)所示的计算公式，计算结果为 206.8 kPa。公式(7)如下所示

=TREND(*S5*:*S7*,*R5*:*R7*,*R2*)　　(7)

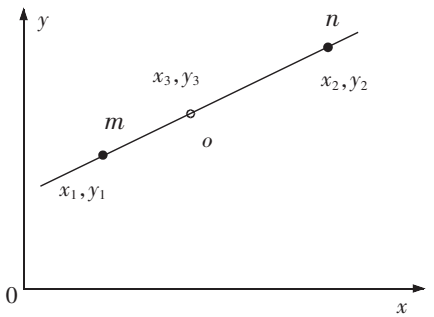


图 2　Trend 函数应用于线性插值原理

Fig.2　Principle of TREND function applied to the linear interpolation

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

式(7)中,$S6:S7$ 为 f_1 和 f_2 组成的承载力引用,为参数 *known_y's* 的具体形式;$R6:R7$ 为 e_1 和 e_2 组成的孔隙比引用,为参数 *known_x's* 的具体形式;$R2$ 为 e_3,新的要插值的孔隙比,为参数 *new_x's* 的具体形式。

计算 e_3=0.858,I_{L2}=0.7 时的承载力 f_6 的方法为在 $T8$ 单元格输入公式(8)所示的计算公式,计算结果为192.6 kPa。公式(8)如下所示

$$=\mathrm{TREND}(T6:T7,R6:R7,R2) \quad (8)$$

计算 e_3=0.858,I_{L3}=0.636 时的承载力 f_7 的方法为在 $T9$ 单元格输入式(9)所示的计算公式,计算结果f_7=201.69 kPa。公式(9)如下所示

$$=\mathrm{TREND}(S8:T8,S5:T5,B11) \quad (9)$$

式(8)和(9)各参数意义与式(7)类似。图 3 所示就是二维线性插值的结果,可见进行二维插值需要调用三次 TREND 函数。

P	*Q*	*R*	*S*	*T*
1	辅助单元格			
2	e_3	0.858	位置	4
3	I_{L3}	0.636	位置	7
5	查表区间	eV_L	0.6	0.7
6		0.8	230	210
7		0.9	190	180
8			206.8	192.6
9		e_3,I_{L3}	→	201.69

图 3 使用 TREND 函数实现二维插值算法图

Fig.3 Application of TREND function to achieve two-dimensional interpolation

4 Excel 查表原理与计算方法设计

在上面的表格已经实现了二维线性插值,但在图 3 中需要的 f_1, f_2, f_3, f_4 是手动查出来并输入的。若 e_3, I_{L3} 的值变更时,f_1, f_2, f_3, f_4 又要重新查找,如何查找 e_3 和 I_{L3} 对应的最近的 f_1, f_2, f_3, f_4 是待解决的问题。

4.1 数据位置查找方法

Excel 查表时,在孔隙比和液性指数均为有序排列的情况下,就是确定指定孔隙比和液性指数在表中对应的位置区间。在 Excel 中,查找数据在某个单元格区域的位置可以使用 MATCH 函数,其使用语法为

$$\mathrm{MATCH}(lookup_value,lookup_array,match_type)$$

该函数返回符合特定值特定顺序的项在数组中的相对位置,三个参数的含义分别为:*lookup_value* 是需要在数据表(*lookup_array*)中查找的值,*lookup_array* 包含有所要查找数值的连续的单元格区域,*match_type* 为 1 代表升序排列,0 代表任意顺序排列,−1 代表降序排列。

查 e_3=0.858 时,首先要查 e_3 在 0.5~1.1 中的位置,首先确定小于 e_3=0.858 的最大值为 0.8,对应数组[0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0,1.1]中的位置就是 4,其查找方法可以在 $T2$ 单元格中用式(10)来计算

$$=\mathrm{MATCH}(R2,A2:A8,1) \quad (10)$$

同理查得小于 I_{L3}=0.636 在数组[0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0,1.1,1.2]的位置计算方法为在 $T3$ 单元格中用式(11)来计算,计算结果为 7。公式(11)如下所示

$$=\mathrm{MATCH}(R3,B1:N1,1) \quad (11)$$

$T2$ 和 $T3$ 单元格计算结果显示 4 和 7,即 0.8(小于 0.858 的最大值)和 0.6(小于 0.636 的最大值)所在的位置,在承载力区域 $B2:N8$ 的相对位置为第 4 行和第 7 列,其查得的承载力值为 f_1, 5 行 7 列对应的为 f_2,4 行 8 列对应的为 f_3,5 行 8 列对应的为 f_4。

4.2 插值数据区域承载力数据还原计算

根据上面的查找方法,可得第 4 行第 7 列承载力值为 f_1, 5 行 7 列对应的为 f_2,4 行 8 列对应的为 f_3,5 行 8 列对应的为 f_4。则可以通过表 1 查知 f_1, f_2, f_3, f_4 的具体数据分别为 230,190,210,180。根据相对位置获得 f_1~f_4 的承载力数据,需要用到 INDEX 函数,其语法为

$$\mathrm{INDEX}\ (array,row_num,column_num)$$

该函数可返回指定单元格数组(*array*)指定行(*row_num*)指定列(*column_num*)的数据。具体应用时,可以在 $S6$, $S7$, $T6$, $T7$ 单元格中分别输入以下的式(12)~ 式(15),即获得插值区域

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$=\mathrm{INDEX}(B2:N8,T14,T3) \tag{12}$$

$$=\mathrm{INDEX}(B2:N8,T2+1,T3) \tag{13}$$

$$=\mathrm{INDEX}(B2:N8,T14,T3+1) \tag{14}$$

$$=\mathrm{INDEX}(B2:N8,T2+1,T3+1) \tag{15}$$

式(12)~式(15)实际获得的插值区域为 $H5:I6$ 的引用，在 $S6,S7,T6,T7$ 显示的数据即为所查询的 f_1=230，f_2=190，f_3=210，f_4=180，单位均 kPa。则再用前面所述的 TREND 函数进行线性插值就可自动完成双指标的二维自动查表和自动插值计算。

4.3　边界问题的处理

插值计算时，当输入的 e 小于 0.5 时，则无法查找到相应的值，计算结果显示“#N/A”，即在函数中没有可用数值时，产生错误值“#N/A”，因此对可能遇到的边界问题要特殊处理。处理方法为当 e 小于 0.5 时，按 0.5 的位置计算，当 e 大于 1.1 时，按 1.1 前一行位置计算小值，需要按 1.0~1.1 之间插值。具体实现方法为：把 $T2$ 和 $T3$ 单元中的公式修正成式(16)和式(17)

$$=\mathrm{IF}(R2<0.5,1,\mathrm{IF}(R2>=1.1,\mathrm{COUNT}(A2:A8)-1,\mathrm{MATCH}(R2,A2:A8,1))) \tag{16}$$

$$=\mathrm{IF}(R3<0.1,1,\mathrm{IF}(R3>=1.2,\mathrm{COUNT}(B1:N1)-1,\mathrm{MATCH}(R3,B1:N1,1))) \tag{17}$$

在式(16)中，当 $R2$ 单元格的值小于 0.5 时，显然在数据列表中查不到此值，则强制其相对位置为 1；当 $R2$ 大于等于 1.1 时，相对位置为 1.0 所对应的相对位置，此时强制为 $\mathrm{COUNT}(A2:A8)-1$ 即为 1.0 对应的位置，其中 $\mathrm{COUNT}(A2:A8)$ 为孔隙比数据表的总行数。当 $R2$ 在 0.5~1.1 之间时，则按 $\mathrm{MATCH}(R2:A2:A8,1)$ 求解其相对位置。式(17)解释与式(16)类似。

以上所有设计结果如图 3 所示，经过测试其计算结果与式(6)相同，说明文中的 Excel 方法是可靠的。

5　结语

论文结合岩土工程中的承载力计算的实际工程问题推导了二维线性插值的计算公式，但计算公式复杂且计算容易出错，不宜在工程中采用。本文提出的 Excel 函数法语法简单，可以实现自动查表和自动二维线性插值。经过分析可得出以下结论：

1) TREND 函数参数为 (y_1,y_2) 和 (x_1,x_2) 两组数据时，其拟合的直线就是 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 两点的联线，且相关系数为 1，因此可以用作线性插值计算。TREND 函数使用三次分别计算出 e_3，I_{L1} 对应值 f_5；e_3，I_{L2} 对应值 f_6；e_3，I_{L3} 对应值 f_7，即可完成二维表格的二维线性插值。

2) MATCH 函数为 Excel 中查找 e_3(或 I_{L3})在一维数组中小于 e_3 数据表中最大数位置的函数，当所查找值不在给定的数组范围时，要进行边界特殊处理。当所查值小于表中最小值时，则位置设为 1，当所查找值大于表中最大值，则位置为数组成员数减 1。

3) MATCH 函数和 INDEX 函数配合可以查找 e 和 I_L 在承载力表中最近的插值区域，再配合 TREND 函数可以实现自动查表和自动插值，经过与推导公式对比证明文中提出的 Excel 方法简单可靠，设计的计算表格可以作为承载力计算的实用工作。

参考文献：

[1] 王军.基于双线性插值模型的高程异常值的获取[J]. 云南民族大学学报：自然科学版，2013，22(1)：75-78.

[2] 王胜兵，戴明强，黄登斌.基于双线性插值拟合的山形曲面面积计算[J].兵工自动化，2012，31(3)：42-43.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[3] 马德堂,杨春雨,李绪宣.基于双线性插值的三维横向各向同性介质初至波射线追踪[J].地球物理学进展,2014,29(3):1201-1205.
[4] 郭晓文,张有会,王志巍,等.参考曲率的双线性插值滤波[J].计算机工程与应用,2012,48(35):161-165.
[5] 赵元海,史庆涛.土压力在位移影响下的近似求解方法[J].华东交通大学学报,2013,30(6):49-54.
[6] 赵煌,彭勇.双线性插值算法的优化及其应用[J].电视技术,2012,36(17):30-32.
[7] 吴桂萍,吴巍,王成,等.基于双线性插值的鱼眼图像校正方法[J].计算机应用与软件,2012,29(2):122-124.
[8] 李健,陈国强.Excel在土工试验资料整理中的应用[J].电力勘测设计,2011,18(4):8-10.
[9] 张永成,王洪辉,谭桂花.基于Excel VBA的图解粒度参数计算[J].成都理工大学学报:自然科学版,2010,37(6):650-653.
[10] 曲蒙,李新勇,唐永宁,等.基于EXCEL的矿槽料仓计算[J].工业建筑,2012,42(s1):152-154.
[11] 乔玉娥,郑世棋,翟玉卫,等.Excel曲线拟合功能在测量不确定度评定中的应用[J].上海计量测试,2013,41(5):25-29.
[12] 路云龙,张转梅,李文钰.利用Excel求解插值问题[J].长春大学学报,2012,22(10):1228-1229.

Design and Application of Two-dimensional Table Lookup and Bilinear Interpolation Algorithm

Mo Linli[1], Zhao Xiushao[2], Zheng Wei[2], Wang Xu[2]

(1.School of Software East China Jiaotong University; 2 School of Civil Engineering and Architecture, East Ching Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Two-dimensional table lookup and bilinear interpolation calculation is widely applied in geotechnical engineering, but the workload is big and error-prone in derived formula calculation. It is rather complex to deduce the bilinear interpolation formula by using basic principle of linear interpolation and the basic bearing capacity in actual engineering projects. This paper uses characteristic of linear fitting data for TREND function and finds out that the coefficient is 1 when the function's parameters are two groups' data with linear fitting line just through the two points formed by the two groups of data. Accordingly, TREND function can be used for linear interpolation calculation and algorithm of bilinear interpolation is then designed. Automatic look-up table method is carried out through the application of MATCH function to obtain dual index interpolation interval, the INDEX function to determine reasonable interpolation region, and the TREND function to achieve automatic search and bilinear interpolation of two-dimensional table. Special treatment for lookup interpolation interval on the boundaries of two-dimensional table is needed, and extension of linear interpolation can be achieved by special treatment. The calculation form designed in this paper is convenient and reliable, which can be used as a tool for bearing capacity interpolation, greatly facilitating the practical engineering application.

Key words: Excel function method; two-dimensional table lookup; bilinear interpolation; epitaxial interpolation

(责任编辑 姜红贵)

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net