

文章编号:1005-0523(2016)01-0128-08

线性四角链及四角莫比乌斯图的 Kirchhoff 指标

王广富,鲁玖环

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要:图 G 的 Kirchhoff 指标是指图 G 的所有点对之间的电阻距离之和。主要研究了线性四角链及四角莫比乌斯图的 Kirchhoff 指标。根据拉普拉斯多项式分解定理、Kirchhoff 指标和拉普拉斯特征值之间的关系以及矩阵分解定理等得到线性四角链及四角莫比乌斯图的 Kirchhoff 指标计算公式;最后,通过举例直接利用欧姆定律所得 Kirchhoff 指标对所求公式加以验证。

关键词:电阻距离;Kirchhoff 指标;拉普拉斯矩阵;线性四角链;四角莫比乌斯图

中图分类号:O157.5

文献标志码:A

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2016.01.019

1993 年, Klein 和 Randic 提出了关于图的电阻距离的概念^[1],把图 G 中的每条边都设为单位电阻,构造出一个电网络 N ,由欧姆定律,定义图 G 中两个顶点 i 和 j 的电阻距离 r_{ij} 为电网络 N 中 i 和 j 这两个节点之间的总电压与总电流的比值,即 i 和 j 两个节点之间的有效电阻,图 G 的 Kirchhoff 指标就是指 G 的各顶点之间的电阻距离之和。它的研究在各个方面都有重要意义,例如,在化学上,对 Kirchhoff 指标已有广泛的研究。文献[2]利用距离矩阵和电阻距离矩阵研究了四种多环的循环图:包含 5 长圈的 5 阶图,代表柏拉图多面体的 Schlegel 图,巴克敏斯特富勒烯同分异构体和 C_{70} 同分异构体,根据它们的循环性再依照 Kirchhoff 指标排序;文献[3]运用福斯特定理、随机游动、叠加原理得到特定的连通图的电阻距离或 Kirchhoff 指标的表达式;文献[4]根据拉普拉斯谱和特征向量得到循环图的 Kirchhoff 指标公式。在数学上, Kirchhoff 指标在图论中也占据了重要位置,但直接计算电阻距离和 Kirchhoff 指标还是很困难的,所以得到 Kirchhoff 指标公式十分必要。文献[5]利用欧拉函数和莫比乌斯函数,得到了一个关于整循环图的 Kirchhoff 指标的简便计算公式;文献[6]根据图的拉普拉斯谱理论,得到了三类由按特定方式粘贴的完全图构成的特殊弦图的 Kirchhoff 指标公式。本文主要研究线性四角链及四角莫比乌斯图的 Kirchhoff 指标,逐步运用矩阵分解定理等方法来求得仅用四边形个数表达的 Kirchhoff 指标计算公式。

1 预备知识

本文所研究的线性四角链及四角莫比乌斯图是连通的无向图。用 V 和 E 分别表示图 G 的顶点集合和边集合,设 $V=\{1,2,3,\cdots,n\}$, G 中的每条边为单位电阻,则图 G 的 Kirchhoff 指标 $Kf(G)=\sum_{i<j} r_{ij}$ 。

图 G 的拉普拉斯矩阵 L 定义为图 G 的度对角矩阵与邻接矩阵之差,即

$$L=D-A \quad (1)$$

收稿日期:2015-07-27

基金项目:国家自然科学基金(11261019,11361024);江西省自然科学基金(2015BAB201002);江西省教育厅科学研究项目(GJJ14380);江西高校科技落地计划项目(KJLD12067)

作者简介:王广富(1976—),男,副教授,博士,研究方向为图论及其应用。

其中: D 是图 G 的度对角矩阵,即由 G 的顶点的度组成的对角矩阵,记为 $D=diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$,其中 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 表示图 G 中各顶点的度; A 是图 G 的邻接矩阵。

假设 $G=(V, E)$ 和 $G'=(V', E')$ 为两个连通图,如果有一个双射 $f:V \rightarrow V'$,使得边之间有: $x \rightarrow x', y \rightarrow y', x, y \in V, x', y' \in V'; xy \in E \Leftrightarrow x'y' \in E'$,则称图 G 和 G' 是同构的,称 f 是一个同构。 f 为一个自同构 $\Leftrightarrow G=G'$ 。

设 G 是 n 个顶点的连通图且其拉普拉斯矩阵为 L , L 的特征多项式就定义为 $P_L(x)=\det(xI_n-L)$,这里 I_n 表示 n 阶单位矩阵,称这个多项式为图 G 的拉普拉斯多项式。

设 G 的拉普拉斯特征值,也就是多项式 $P_L(x)$ 的根为 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$,假设 λ_0 是最小的拉普拉斯特征值,则有 $\lambda_0=0$,并且对 $k>0, \lambda_k>0$ ^[7],图 G 的拉普拉斯谱 $S(G)$ 定义为所有 $\lambda_i, i=0, \cdots, n-1$ 的集合,即

$$S(G)=(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}), \quad (2)$$

有如下定理:

定理 1^[8-9] 对任意 n 阶连通图 $G, n \geq 2$

$$Kf(G)=n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k} \quad (3)$$

设 T_n 表示由 $n-1$ 个四边形组成的一个线性四角链, M_n 为一个长度为 n 的四角莫比乌斯图, T_n 和 M_n 如图 1 和图 2 所示。

文献 [10] 利用图的卡氏积和循环图的 Kirchhoff 指标公式得到线性四角链及四角莫比乌斯分子图的 Kirchhoff 指标。本文则首先介绍了拉普拉斯多项式分解定理,显然, T_n 和 M_n 有 $2n$ 个特征值,根据拉普拉斯多项式分解定理,将 T_n 的拉普拉斯多项式分解为路 P_n 的拉普拉斯多项式和一个 n 阶矩阵的特征多项式的乘积。同理,将 M_n 的拉普拉斯多项式分解为圈 C_n 的拉普拉斯多项式和一个 n 阶矩阵的特征多项式的乘积。再依据第二个多项式中的根与系数的关系,分别求出 T_n 和 M_n 剩余的 n 个特征值的倒数和。接下来根据定理 1 可以得到 T_n 和 M_n 的 Kirchhoff 指标公式。

文中未加说明的记号以及定义等参见文献[11]。

2 拉普拉斯多项式分解

设 π 是图 G 的一个自同构。如果 π 能够表示成以下形式

$$\pi=(1^\circ)(2^\circ)\cdots(m^\circ)(1,1')(2,2')\cdots(k,k') \quad (4)$$

其中: $(1^\circ)\cdots(m^\circ), (1,1')\cdots(k,k')$ 是不相交的

1-圈和对换,则 $m+2k=|V|$ 有。记

$$V_0=\{1^\circ, 2^\circ, \cdots, m^\circ\}, V_1=\{1, 2, \cdots, k\}, V_2=\{1', 2', \cdots, k'\} \quad (5)$$

对图 G 中的顶点排序,则 L 能表示成以下分块矩阵:

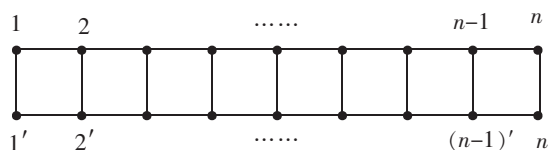


图 1 T_n 及其标号
Fig.1 T_n and its labeling

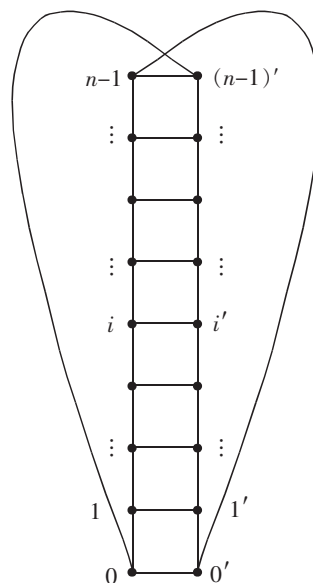


图 2 M_n 及其标号
Fig.2 M_n and its labeling

$$L = \begin{bmatrix} L_{V_0V_0} & L_{V_0V_1} & L_{V_0V_2} \\ L_{V_1V_0} & L_{V_1V_1} & L_{V_1V_2} \\ L_{V_2V_0} & L_{V_2V_1} & L_{V_2V_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中: $L_{V_iV_j}$ 是 V_i 中的顶点对应的行和 V_j 中的顶点对应的列构成的子矩阵, $i, j=0, 1, 2$, 记

$$L_A = \begin{bmatrix} L_{V_0V_0} & \sqrt{2} L_{V_0V_1} \\ \sqrt{2} L_{V_1V_0} & L_{V_1V_1} + L_{V_1V_2} \end{bmatrix}, L_S = L_{V_2V_2} - L_{V_1V_2} \quad (7)$$

杨玉良和于同隐^[12]得到了拉普拉斯多项式分解定理, 在这里用文献[13–14]中的方式来叙述:

定理 2 设 L, L_A 和 L_S 为以上定义的矩阵, 则 $P_L(x) = P_{L_A}(x)P_{L_S}(x)$, 其中 $P_{L_A}(x)$ 和 $P_{L_S}(x)$ 分别为矩阵 L_A 矩阵 L_S 的特征多项式。

特别地, 如果 $V_0 = \phi$, 则

$$L_A = L_{V_1V_1} + L_{V_1V_2}, L_S = L_{V_2V_2} - L_{V_1V_2}, L_{V_1V_1} = L_{V_2V_2} \quad (8)$$

3 线性四角链的 Kirchhoff 指标

设 T_n 顶点及其标号如图 1 所示, 显然可知 $\pi = (1, 1')(2, 2') \cdots (n, n')$ 是 T_n 的一个自同构, 因此 $V_1 = \{1, 2, \cdots, n\}, V_2 = \{1', 2', \cdots, n'\}$, 对应地, $L_{V_1V_1} (=L_{V_2V_2})$ 和 $L_{V_1V_2}$ 如下:

$$L_{V_1V_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}, L_{V_1V_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (9)$$

因此

$$L_A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}, L_S = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (10)$$

根据定理 2, $P_L(x) = P_{L_A}(x)P_{L_S}(x)$, 故 T_n 的拉普拉斯谱由 L_A 和 L_S 的特征值构成, 显然 L_A 是路 P_n 的拉普拉斯矩阵, 因而 L_A 的特征值^[15]为

$$\lambda_i = 4 \sin^2\left(\frac{\pi i}{n}\right), i=1, \cdots, n \quad (11)$$

记 L_S 的特征值为 $\mu_j, j=1, 2, \cdots, n$ 则

$$S(T_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \quad (12)$$

设

$$\det(xI_n - L_S) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (13)$$

则有下述定理:

定理 3

$$Kf(T_n) = 2Kf(P_n) + (-1)^{n+1} 2n \frac{a_{n-1}}{\det L_S} \quad (14)$$

证明 由定理 1

$$Kf(T_n) = 2n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \right) \quad (15)$$

由于

$$2n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} = 2 \times n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} = 2Kf(P_n) \quad (16)$$

又

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j}{\prod_{j=1}^n \mu_j} = \frac{(-1)^{n-1} a_{n-1}}{(-1)^n a_n} = (-1)^{n+1} \frac{a_{n-1}}{\det L_S} \quad (17)$$

定理得证。

由 $Kf(P_n) = \frac{n^3 - n}{6}$ [16], 故只需计算 $\det L_S$ 和 a_{n-1} 。

参考文献[13]的计算方法可得

$$\det L_S = (2 + \sqrt{3})^{n-2} \left(\frac{12 + 7\sqrt{3}}{3} \right) + (2 - \sqrt{3})^{n-2} \left(\frac{12 - 7\sqrt{3}}{3} \right) \quad (18)$$

记 L_S 的对角元为 $l_{ii}, i=1, 2, \dots, n$, 则

$$\det(xI_n - L_S) = \begin{vmatrix} x-l_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x-l_{22} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-l_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-l_{n-2,n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x-l_{n-1,n-1} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x-l_{n,n} \end{vmatrix} \quad (19)$$

令

$$L_i = \begin{vmatrix} -l_{11} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -l_{22} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -l_{i-1,i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -l_{i+1,i+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -l_{n-1,n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & -l_{n,n} \end{vmatrix} \quad (20)$$

显然

$$a_{n-1} = \sum_{i=1}^n L_i = (-1)^{n-1} \left(\frac{3+2\sqrt{3}+3(2+\sqrt{3})n}{18} (2+\sqrt{3})^{n-1} + \frac{3-2\sqrt{3}+3(2-\sqrt{3})n}{18} (2-\sqrt{3})^{n-1} \right) \quad (21)$$

由此可得

定理 4

$$Kf(T_n) = \frac{n^3}{3} + n^2 \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{(2+\sqrt{3})^{n-2}(12+7\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^{n-2}(12-7\sqrt{3})} \quad (22)$$

考察 $Kf(T_n)$ 的渐近性质, 显然, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Kf(T_n) \rightarrow \frac{n^3}{3}$, 与文献[10]所得结果相同。而在文献[10]中

$$Kf(T_n) = n \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\pi j}{2n}\right)} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+2\sin^2\left(\frac{\pi j}{2n}\right)} \right) \quad (23)$$

显然, 公式(22)比公式(23)更加简便。

4 四角莫比乌斯图的 Kirchhoff 指标

M_n 中的顶点标号如图2。显然 $\pi = (0, 0')(1, 1') \cdots (n-1, (n-1)')$ 是 M_n 的一个自同构, 因此, $V_1 = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, $V_2 = \{0', 1', 2', \cdots, (n-1)'\}$ 。对应地, $L_{V_1 V_1} (= L_{V_2 V_2})$ 和 $L_{V_1 V_2}$ 如下:

$$L_{V_1 V_1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad L_{V_1 V_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (24)$$

因此

$$L_A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad L_S = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (25)$$

易知 L_A 是圈 C_n 的拉普拉斯矩阵, 故 L_A 的特征值^[15]为

$$\lambda_i = 4\sin^2\left(\frac{\pi i}{n}\right), i=1, \cdots, n \quad (26)$$

设 $\mu_j, j=1, 2, \cdots, n$ 表示 L_S 的特征值, 则根据定理 2, 显然 M_n 的拉普拉斯谱

$$S(M_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \quad (27)$$

设

$$\det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{L}_S) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (28)$$

则有如下定理:

定理 5

$$Kf(M_n) = 2Kf(C_n) + (-1)^{n+1} 2n \frac{a_{n-1}}{\det \mathbf{L}_S} \quad (29)$$

由 $Kf(C_n) = \frac{n^3 - n}{12}$ [17], 故只需要计算 $\det \mathbf{L}_S$ 和 a_{n-1} 。

与前面计算类似, 可得

$$\det \mathbf{L}_S = (7 + 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{n-2} + (7 - 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{n-2} + 2 \quad (30)$$

显然

$$a_{n-1} = \sum_{i=1}^n L_i = (-1)^{n-1} n \left((2 - \sqrt{3})^{n-3} \left(\frac{15}{2} - \frac{13\sqrt{3}}{3} \right) + (2 + \sqrt{3})^{n-3} \left(\frac{15}{2} + \frac{13\sqrt{3}}{3} \right) \right) \quad (31)$$

由此可得

定理 6

$$Kf(M_n) = \frac{n^3 - n}{6} + 2n^2 \frac{(2 - \sqrt{3})^{n-3} \left(\frac{15}{2} - \frac{13\sqrt{3}}{3} \right) + (2 + \sqrt{3})^{n-3} \left(\frac{15}{2} + \frac{13\sqrt{3}}{3} \right)}{(7 + 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{n-2} + (7 - 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{n-2} + 2} \quad (32)$$

考察 $Kf(M_n)$ 的渐近性质, 易证, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Kf(M_n) \rightarrow \frac{n^3}{6}$, 与文献[10]所得结果相同。而在文献[10]中

$$Kf(M_n) = 2n \sum_{k=1}^{2n-1} \left(3 - \cos k\pi - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right)^{-1} \quad (33)$$

显然, 公式(32)比公式(33)更加简便。

5 实例验证

例 1 当 $n=2$ 时, T_2 即为 C_4 , 如图 3 所示。

由于

$$r_{12} = r_{23} = r_{34} = r_{14} = \frac{1 \times 3}{1 + 3} = \frac{3}{4}, r_{13} = r_{24} = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1 \quad (34)$$

故 T_2 的电阻距离之和为 $\frac{3}{4} \times 4 + 1 \times 2 = 5$ 。又

$$Kf(T_2) = \frac{2^3}{3} + 2^2 \frac{(2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})^{2-2} (12 + 7\sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})^{2-2} (12 - 7\sqrt{3})} = \frac{8}{3} + \frac{7}{3} = 5 \quad (35)$$

结论成立。

例 2 四角莫比乌斯图 M_2 如图 4 所示。

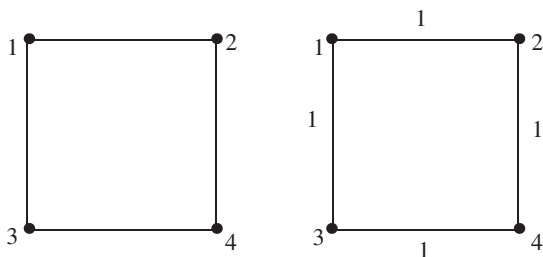


图 3 T_2
Fig.3 T_2

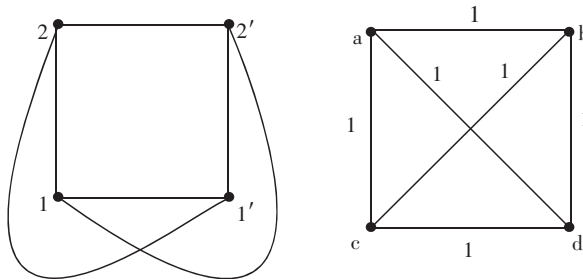


图 4 M_2
Fig.4 M_2

由欧姆定律

$$r_{ab} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2} \quad (36)$$

又

$$r_{cd} = r_{ab} = r_{bd} = r_{cb} = r_{ad} = r_{ac} = \frac{1}{2} \quad (37)$$

故 M_2 的电阻距离之和为 $r_{cd} + r_{ab} + r_{bd} + r_{cb} + r_{ad} + r_{ac} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ 。又

$$Kf(M_2) = \frac{2^3 - 2}{3} + 2 \times 2^2 \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})^{2-3} \left(\frac{15}{2} - \frac{13\sqrt{3}}{3} \right) + (2 + \sqrt{3})^{2-3} \left(\frac{15}{2} + \frac{13\sqrt{3}}{3} \right)}{(7 + 4\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{2-2} + (7 - 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{2-2} + 2} = 1 + 2 = 3 \quad (38)$$

结论得证。

参考文献:

- [1] KLEIN D J, RANDILC M. Resistance distance[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 1993, 12(1): 81-95.
- [2] BABIC D, KLEIN D J, LUKOVITS I, et al. Resistance distance matrix: a computational algorithm and its application[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2002, 90(1): 166-176.
- [3] PALACIOS J L. Closed form formulas for Kirchhoff index[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2001, 81(2): 135-140.
- [4] ZHANG H P, YANG Y J. Resistance distance and Kirchhoff index in circulant graphs[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2007, 107(2): 330-339.
- [5] 周后卿, 周琪. 循环图的 Kirchhoff 指标[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 2014, 48(2): 162-167.
- [6] 陈方珂, 杨金博. 三类特殊弦图的 Kirchhoff 指标[J]. 大连民族学院学报, 2009, 11(1): 40-42.
- [7] MERRIS R. Laplacian matrix of graphs: a survey[J]. Linear Algebra and its Applications, 1994(197/198): 143-176.
- [8] GUTMAN I, MOHAR B. The Quasi Wiener and the Kirchhoff indices coincide[J]. Journal of Chemical Information and Computer Sciences, 1996, 36(5): 982-985.
- [9] ZHU H Y, KLEIN D J, LUKOVITS I. Extensions of the Wiener number[J]. Journal of Chemical Information and Computer Sciences, 1996, 36(3): 420-428.
- [10] 杨玉军. 图的电阻距离和 Kirchhoff 指标[D]. 兰州: 兰州大学, 2006: 18-25.
- [11] 张先迪, 李正良. 图论及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 1-68.
- [12] YANG Y L, YU T Y. Graph theory of viscoelasticities for polymers with starshaped, multiple-ring and cyclic multiple-ring molecules[J]. Makromolekulare Chemie, 1985, 186(3): 609-631.
- [13] YANG Y J, ZHANG H P. Kirchhoff index of linear hexagonal chains[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2008, 108(3): 503-512.
- [14] WANG G F, XU B G. Kirchhoff index of hexagonal M biagraphs[C]//2011 International Conference on Multimedia Technology, 2011: 5912-5915.
- [15] ANDERSON JR W N, MORLEY T D. Eigenvalues of the Laplacian of a graph[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1985, 18(2): 141-145.
- [16] ENTRINGER R C, JACKSON D E, SNYDER D A. Distance in graphs[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 1976, 26(2): 283-296.
- [17] LUKOVITS I, NIKOLI S, TRINAJSTI N. Resistance distance in regular graphs[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 1999, 71(3): 217-225.

Kirchhoff Index of Linear Tetragonal Chains and Tetragonal Möbius Graphs

Wang Guangfu, Lu Jihuan

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The Kirchhoff index of G is the sum of resistance distances between all pairs of vertices in G . This paper studies the Kirchhoff index of linear tetragonal chains and tetragonal Möbius graphs. According to the Laplacian polynomial decomposition theorem, the relationship between Kirchhoff index and the Laplacian eigenvalues, matrix decomposition theorem, this paper obtains formula for Kirchhoff index of linear tetragonal chains and tetragonal Möbius graphs. Finally, it verifies the formula using two examples whose Kirchhoff indexes are obtained from Ohm's law.

Key words: resistance distance; Kirchhoff index; Laplacian matrix; linear tetragonal chains; tetragonal Möbius graphs

(责任编辑 姜红贵)