

文章编号:1005-0523(2017)06-0109-07

两类图的符号控制数

闫云娟,徐保根,冯大一

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要: 设图 $G=(V,E)$ 为一个图,一个双值函数 $f:V \rightarrow \{1,-1\}$,若 $S \subseteq V$ 则记 $f(S) = \sum_{v \in S} f(v)$ 。如果对任意的 $v \in V$,均有 $f(N[v]) \geq 1$ 成立,则称 f 为图 G 的一个符号控制函数,图 G 的符号控制数定义为 $\gamma_s(G) = \min \{f(V) | f \text{ 为图 } G \text{ 的一个符号控制函数}\}$ 。 $C_n \text{---} P_m$ 表示 P_m 的一个端点与 C_n 中的一个点粘接(重合)而成的图; $C(n,m,n) = C_n \text{---} P_m \text{---} C_n$ 表示 P_m 的两个端点分别粘接一个 C_n 而成的图。文章确定了 $C(n,m)$ 和 $C(n,m,n)$ 的符号控制数。

关键词: 图;符号控制函数;符号控制数

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2017.06.014

1 相关定义及推论

设图 $G=(V,E)$,对于任意顶点 $v \in V$,在 G 中与 v 点相邻的所有顶点的集合称为 v 在图 G 中的开邻域,记作 $N_G(v) = \{u | uv \in E(G)\}$, v 点在图 G 中的闭邻域记为 $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ 。顶点 v 在 G 中的度是指 v 在 G 中邻点的个数,记作 $d_G(v) = |N_G(v)|$,不引混乱时,分别简记为 $N(v)$, $N[v]$ 和 $d[v]$ 。 C_n 和 P_n 分别表示 n 阶圈和路。

对于图 $G=(V,E)$,定义一个函数 $f:V \rightarrow R$ 和 G 的一个子集 $S \subseteq V(G)$,记 $f(S) = \sum_{v \in S} f(v)$ 。

J E Dunbar^[1]等在 1995 年首次提出了图的符号控制的概念,这很快受到了学者们的广泛关注。

定义 1^[2-4] 设图 $G=(V,E)$ 为一个图,一个双值函数 $f:V \rightarrow \{1,1\}$,如果对任意的 $v \in V$,均有 $f(N[v]) \geq 1$ 成立,则称 f 为图 G 的一个符号控制函数,图 G 的符号控制数定义为: $\gamma_s(G) = \min \{f(V) | f \text{ 为图 } G \text{ 的一个符号控制函数}\}$,并将使得 $\gamma_s(G) = f(V)$ 的符号控制函数称 f 为图 G 的一个最小符号控制函数。

引理 1^[5-7] 设 f 为图 G 的一个符号控制函数, $v \in V$,当 $d(v)$ 为奇数时 $f(N[v]) \geq 2$,当 $d(v)$ 为偶数时 $f(N[v]) \geq 1$ 。

引理 2^[8-9] 设 $n \geq 3$,圈 C_n 的最小控制数 $\gamma_s(C_n) = n - 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ 。

定义 2 由 P_m 的一个端点与 C_n 中的一个点粘接(重合)而成的图形称为气球图记为 $C(n,m) = C_n \text{---} P_m$, P_m 与 C_n 的粘接点记为 $v_2(u_m)$;在 C_n 上从 v_1 开始逆时针编号,在 P_m 上从 u_1 开始从左到右编号。

定义 3 由 P_m 的两个端点分别粘接一个 C_n 而成的图形称为哑铃图记为 $C(n,m,n) = C_n \text{---} P_m \text{---} C_n$,左侧 C_n 和 P_m 的粘接点记为 $v_2(w_1)$,右侧 C_n 和 P_m 的粘接点记为 $u_2(w_m)$;在左侧 C_n 上从 v_1 开始逆时针编号,在右侧 C_n 上 u_1 从开始顺时针编号,在 P_m 上从 w_1 开始从左到右编号。

收稿日期:2017-06-22

基金项目:国家自然科学基金(11361024);江西省高校科技落地计划项目(KJLD12067);江西省自然科学基金项目(20171BAB201009)

作者简介:闫云娟(1977—),女,讲师,研究方向为图与网络。

2 主要结论及证明

定理1 气球图记为 $C(n, m) = C_n \cup P_m; n \geq 3, m \geq 3$; 为方便书写记 $G_1(n, m), \lambda = |n(\bmod 3) - m(\bmod 3)|$,

① 当 $\lambda = 1$ 时, $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。

② 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\begin{cases} n \leq 1(\bmod 3) \text{ 时}, \gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 \\ n = 2(\bmod 3) \text{ 时}, \gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3 \end{cases}$ 。

证明 设圈 C_n 和路 P_m 的粘接点为 $v_2 = u_m$, 圈 C_n 上共有 n 个点, 路 P_m 上有 m 个点; 设 f 为图 G_1 的一个最小符号控制函数, 则 $\gamma_s(G) = f(V)$, 显然 $f(u_1) = f(u_2) = 1$, 否则与 f 为图 G_1 的一个最小符号控制函数矛盾。

1) 当 $m = 3t$ 时。

① $n = 3k$ 。 $\gamma_s(G_1) = f(u_1) + \sum_{j=1}^{t-1} f(N[u_{3j}]) + f(N[v_2]) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i-1}]) \geq 1 + (t-1) + (k-1) + 2 = t + k + 1 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$;

在 $V(G_1)$ 上定义函数 f_1 使得 $f_1(v_i) = \begin{cases} -1, i \equiv 2(\bmod 3) \\ 1, i \equiv 0, 1(\bmod 3) \end{cases} i = 1, \dots, n, f_1(u_j) = \begin{cases} -1, j \equiv 0(\bmod 3) \\ 1, j \equiv 1, 2(\bmod 3) \end{cases} j = 1, \dots, m-1$ 则 $f_1(v_i) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$ 。

因此 $\gamma_s(G_1) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$, 故此时 $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$ 。

② $n = 3k + 1$ 。因为 $d(v_2) = 3$, 必有 $f(N[v_2]) \geq 2$, 故 v_2 闭邻域内对应的最小符号控制函数值为“-1”的点至多只有一个, 分以下两种情况讨论:

情况1 若 v_2 闭邻域内标号为“-1”的点在圈上。由引理2知, 因为在圈 C_n 上至多有 $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = k$ 个“-1”点, 此时在圈上至少有3个彼此相邻的点标号为“+1”, 否则与 f 是最小控制函数矛盾; 不妨设 $f(v_n) = f(v_1) = f(v_2) = 1$ 。

$$\begin{aligned} \gamma_s(G_1) &= f(u_1) + f(u_2) + \sum_{j=1}^{t-1} f(N[u_{3j+1}]) + f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i-1}]) + f(v_n) \\ &\geq 2 + (t-1) + 1 + (k-1) + 1 = t + k + 2 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2 \end{aligned} \quad (1)$$

情况2 若 v_2 闭邻域内标号为“-1”的点不在圈上。则必有 $f(v_2) = 1$ 。

$$\begin{aligned} \gamma_s(G_1) &= f(u_1) + f(u_2) + \sum_{j=1}^{t-1} f(N[u_{3j+1}]) + f(v_2) + f(v_3) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i+1}]) \\ &\geq 2 + (t-1) + k + 1 = t + k + 2 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2 \end{aligned} \quad (2)$$

综合式(1)式(2)得: $\gamma_s(G_1) \geq t + k + 2 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。

在 $V(G_1)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i) = \begin{cases} -1, i \equiv 0(\bmod 3) \\ 1, i \equiv 1, 2(\bmod 3) \end{cases} i = 1, \dots, n, f_1(u_j) = \begin{cases} -1, j \equiv 1(\bmod 3) \\ 1, j \equiv 0, 2(\bmod 3) \end{cases} j = 3, \dots, m-1$

则 $f_1(V) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。

因此 $\gamma_s(G_1) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 故此时 $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。

③ $n = 3k + 2$ 。由②同理:

情况1 不妨设 $f(v_n) = f(v_1) = f(v_2) = 1$ 。

$$\gamma_s(G_1) = f(u_1) + f(u_2) + \sum_{j=1}^{t-1} f(N[u_{3j+1}]) + f(v_1) + f(v_2) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i+1}]) \geq t+k+3 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3 \quad (3)$$

情况2 若 v_2 闭邻域内标号为“-1”的点不在圈上,则必有 $f(v_1)=f(v_2)=1$ 。

$$\gamma_s(G_1) = f(u_1) + f(u_2) + \sum_{j=1}^{t-1} f(N[u_{3j+1}]) + f(v_1) + f(v_2) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i+1}]) \geq t+k+3 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3 \quad (4)$$

综合式(3)式(4)得: $\gamma_s(G_1) \geq t+k+3 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3$ 。

在 $V(G_1)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i) = \begin{cases} -1, i \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, i \equiv 0, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad i=1, \dots, n, f_1(u_j) = \begin{cases} -1, j \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, j \equiv 0, 1 \pmod{3} \end{cases} \quad j=3, \dots, m-1,$

则 $f_1(V) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3$ 。

因此, $\gamma_s(G_1) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3$ 。故此时 $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3$ 。

2) 当 $m=3t+1$ 时。

$$\textcircled{1} \quad n=3k。 \gamma_s(G_1) = f(u_1) + f(u_2) + \sum_{j=1}^{t-1} f(N[u_{3j+1}]) + f(N[v_2]) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i-1}]) \geq 1+1+(t-1)+2+(k-1) = t+k+2 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2。$$

在 $V(G_1)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i) = \begin{cases} -1, i \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, i \equiv 0, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad i=2, \dots, n, f_1(v_1)=1, f_1(u_j) = \begin{cases} -1, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, j \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad j=1, \dots, m$, 则 $f_1(V) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。

因此 $\gamma_s(G_1) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。故此时 $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。

$$\textcircled{2} \quad n=3k+1。 \gamma_s(G_1) = f(u_1) + f(u_2) + \sum_{j=1}^{t-1} f(N[u_{3j+1}]) + f(N[v_2]) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i-1}]) + f(v_n) \geq 1+1+(t-1)+2+(k-1)-1 = t+k+1 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1。$$

在 $V(G_1)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i) = \begin{cases} -1, i \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, i \equiv 0, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad i=2, \dots, n; f_1(v_1)=1, f_1(u_j) = \begin{cases} -1, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, j \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad j=1, \dots, m$ 。则 $f_1(V) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$ 。

因此 $\gamma_s(G_1) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$, 故此时 $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$ 。

$\textcircled{3} \quad n=3k+2$ 时, 显然在圈 C_n 上任意相邻两点的符号控制函数值必大于等于 0, 即 $f(v_i) + f(v_{i+1}) \geq 0$, 从而有 $f(v_{3k+1}) + f(v_{3k+2}) \geq 0$ 。

$$\begin{aligned} \gamma_s(G_1) &= f(u_1) + f(u_2) + \sum_{j=1}^{t-1} f(N[u_{3j+1}]) + f(N[v_2]) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i}]) + f(v_{3k+1}) + f(v_{3k+2}) \geq 1+1+(t-1)+2+(k-1) \\ &= t+k+2 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2 \end{aligned}$$

在 $V(G_1)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i) = \begin{cases} -1, i \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, i \equiv 0, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad i=2, \dots, n; f_1(v_1)=1, f_1(u_j) = \begin{cases} -1, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, j \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad j=1, \dots, m$, 则 $f_1(V) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。

因此 $\gamma_s(G_1) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$, 故此时 $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。

3) 当 $m=3t+2$ 时。

$$\textcircled{1} n=3k \quad \gamma_s(G_1) = \sum_{j=1}^{t-1} f(N[u_{3j-1}]) + f(N[v_2]) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i-1}]) \geq t+2+(k-1)=t+k+1 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1。$$

在 $V(G_1)$ 上定义函数 f_1 数使得

$$\begin{cases} f_1(v_i) = \begin{cases} -1, i \equiv 2 \pmod{3} \\ 1, i \equiv 0, 1 \pmod{3} \end{cases} & i=4, \dots, n; f(v_1)=f(v_2)=1, f(v_3)=-1 \\ f_1(u_j) = \begin{cases} -1, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, j \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} & j=1, \dots, m; \end{cases} \text{ 则 } f_1(V) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$$

因此 $\gamma_s(G_1) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$, 故此时 $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$ 。

$$\textcircled{2} n=3k+1 \quad \gamma_s(G_1) = f(u_1) + f(u_2) + \sum_{j=1}^t f(N[u_{3j+1}]) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i+1}]) \geq 2+t+k = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2。$$

在 $V(G_1)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i) = \begin{cases} -1, i \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, i \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad i=1, \dots, n, f_1(u_j) = \begin{cases} -1, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, j \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad j=1, \dots, m$, 则

$$f_1(V) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2。$$

因此 $\gamma_s(G_1) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$, 故此时 $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ 。

$\textcircled{3} n=3k+2$ 。由 $m=3t, n=3k+1$ 时同理, 不妨设 $f(v_{n-1})=f(v_n)=f(v_1)=1$ 。

$$\gamma_s(G_1) = f(u_1) + \sum_{j=1}^t f(N[u_{3j}]) + \sum_{i=2}^k f(N[v_{3i+1}]) + f(v_n) = f(v_1) \geq 1+t+k+2=t+k+3 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3。$$

在 $V(G_1)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i) = \begin{cases} -1, i \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, i \equiv 0, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad i=2, \dots, n, f_1(u_j) = \begin{cases} -1, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 1, j \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad j=1, \dots, m$; 则

$$f_1(V) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3。$$

因此 $\gamma_s(G_1) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3$, 故此时 $\gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3$ 。

综上, 令 $\lambda = |n \pmod{3} - m \pmod{3}|$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \text{ 当 } \lambda=1 \text{ 时, } \gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2 \\ \textcircled{2} \text{ 当 } \lambda \neq 1 \text{ 且 } \begin{cases} n \leq 1 \pmod{3} \text{ 时, } \gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 \\ n = 2 \pmod{3} \text{ 时, } \gamma_s(G_1) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3 \end{cases} \end{cases}$$

定理 2 哑铃图 $C(n, m, n) = C_n - P_m - C_n$, 为方便书写记 $G_2 = C(n, m, n)$, $\lambda = 2n \pmod{3} + m \pmod{3}$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \text{ 当 } \lambda=0 \text{ 时, } \gamma_s(G_1) = 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor \\ \textcircled{2} \text{ 当 } \lambda \neq 0 \text{ 时, } \gamma_s(G_1) = 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + |\lambda - 2| \end{cases}$$

证明 由 P_m 的两个端点分别粘接一个 C_n 而成的图形称为哑铃图记为 $C(n, m, n) = C_n - P_m - C_n$, 左侧 C_n 和 P_m 的粘接点记为 $v_2(w_1)$, 右侧 C_n 和 P_m 的粘接点记为 f 为图 G_2 的一个最小符号控制函数, 则 $\gamma_s(G) = f(V)$ 。

1) 当 $n=3l$ 时。

$$\textcircled{1} m=3t. \gamma_s(G_2)=\sum_{i=1}^l f(N[v_{3i}])+\sum_{j=1}^{t-1} f(N[w_{3j}])+f(N[u_2])+\sum_{k=2}^l f(N[u_{3k-1}])\geq l+(t-1)+2+(l-1)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right].$$

在 $V(G_2)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i)=\begin{cases} -1, i\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, i\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} i=1, \dots, n, f_1(w_i)=\begin{cases} -1, j\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, j\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} j=1, \dots, m-1,$

$$f_1(u_k)=\begin{cases} -1, k\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, k\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} k=1, \dots, n. \text{ 则 } f_1(V)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right].$$

因此 $\gamma_s(G_2)\leq 2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]$, 故此时 $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]$.

$$\textcircled{2} m=3t+1. \gamma_s(G_2)=\sum_{i=2}^l f(N[v_{3i-1}])+f(N[v_2])+\sum_{j=2}^{t-1} f(N[w_{3j+1}])+f(N[u_2])+\sum_{k=2}^l f(N[u_{3k-1}])\geq (t-1)+4+2(l-1)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+1.$$

在 $V(G_2)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i)=\begin{cases} -1, i\equiv 2(\text{mod } 3) \\ 1, i\equiv 0, 1(\text{mod } 3) \end{cases} i=1, \dots, l, f_1(w_i)=\begin{cases} -1, j\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, j\equiv 0, 2(\text{mod } 3) \end{cases} j=1, \dots, m-1,$

$$f_1(u_k)=\begin{cases} -1, k\equiv 2(\text{mod } 3) \\ 1, k\equiv 0, 1(\text{mod } 3) \end{cases} k=1, \dots, n. \text{ 则 } f_1(V)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+1, \text{ 因此 } \gamma_s(G_2)\leq 2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+1.$$

故此时 $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+1$.

$$\textcircled{3} m=3t+2. \gamma_s(G_2)=\sum_{i=0}^{l-1} f(N[v_{3i+1}])+\sum_{j=1}^l f(N[w_{3j}])+\sum_{k=1}^l f(N[u_{3k}])\geq 2l+t=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right].$$

在 $V(G_2)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i)=\begin{cases} -1, i\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, i\equiv 0, 2(\text{mod } 3) \end{cases} i=1, \dots, n, f_1(w_i)=\begin{cases} -1, j\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, j\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} j=2, \dots, m-1,$

$$f_1(u_k)=\begin{cases} -1, k\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, k\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} k=1, \dots, n, \text{ 则 } f_1(V)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right].$$

因此 $\gamma_s(G_2)\leq 2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]$, 故此时 $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]$.

2) 当 $n=3l+1$ 时。

与 $m=3t+1$ 同理,不妨设 $f(v_{n-1})=f(v_n)=f(v_1)=1$,

$$\textcircled{1} m=3t. \gamma_s(G_2)=\sum_{i=1}^l f(N[v_{3i+1}])+\sum_{j=1}^l f(N[w_{3j-1}])+\sum_{k=1}^l f(N[u_{3k+1}])\geq 2l+t=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right].$$

在 $V(G_2)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i)=\begin{cases} -1, i\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, i\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} i=1, \dots, n, f_1(w_i)=\begin{cases} -1, j\equiv 2(\text{mod } 3) \\ 1, j\equiv 0, 1(\text{mod } 3) \end{cases} j=2, \dots, m-1,$

$$f_1(u_k)=\begin{cases} -1, k\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, k\equiv 0, 2(\text{mod } 3) \end{cases} k=2, \dots, n, f(u_1)=1. \text{ 则 } f_1(V)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right].$$

因此 $\gamma_s(G_2)\leq 2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]$, 故此时 $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]$.

$$\textcircled{2} m=3t+1. \gamma_s(G_2)=\sum_{i=1}^l f(N[v_{3i+1}])+\sum_{j=1}^l f(N[w_{3j-1}])+\sum_{k=1}^l f(N[u_{3k}])+f(u_1)\geq 2l+t+1=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+1.$$

在 $V(G_2)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i)=\begin{cases} -1, i\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, i\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} i=1, \dots, n, f_1(w_i)=\begin{cases} -1, j\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, j\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} j=2, \dots, m-1,$

$$f_1(u_k)=\begin{cases} -1, k\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, k\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} k=1, \dots, n.$$

则 $f_1(V)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+1$, 因此 $\gamma_s(G_2)\leq 2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+1$ 。故此时 $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+1$ 。

$$\textcircled{3} m=3t+2。 \gamma_s(G_2)=\sum_{i=1}^l f(N[v_{3i+1}])+\sum_{j=1}^l f(N[w_{3j-1}])+f(N[u_2])+\sum_{k=2}^l f(N[u_{3k-1}])+f(u_n)\geq l+t+2+1+(l-1) \\ =2l+t+2=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+2。$$

在 $V(G_2)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i)=\begin{cases} -1, i\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, i\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} i=1, \dots, n, f_1(w_i)=\begin{cases} -1, j\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, j\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} j=2, \dots, m-1,$
 $f_1(u_k)=\begin{cases} -1, k\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, k\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} k=1, \dots, n。$

则 $f_1(V)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+2$, 因此 $\gamma_s(G_2)\leq 2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+2$ 。故此时 $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+2$ 。

3) 当 $n=3l+2$ 时。

$$\textcircled{1} m=3t。 \text{与定理 1 中 } n=3k+1 \text{ 同理, 不妨设 } f(v_{n-1})=f(v_n)=f(v_1)=1, f(u_{n-1})=f(u_n)=f(u_1)=1, \gamma_s(G_2)=f(v_1)+ \\ \sum_{i=1}^l f(N[v_{3i+1}])+\sum_{j=1}^l f(N[w_{3j-1}])+f(u_1)+\sum_{k=2}^l f(N[u_{3k+1}])\geq 2l+t+2=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+2。$$

在 $V(G_2)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i)=\begin{cases} -1, i\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, i\equiv 0, 2(\text{mod } 3) \end{cases} i=2, \dots, n; f(v_1)=1,$

$f_1(w_i)=\begin{cases} -1, j\equiv 2(\text{mod } 3) \\ 1, j\equiv 0, 1(\text{mod } 3) \end{cases} j=1, \dots, m, f_1(u_k)=\begin{cases} -1, k\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, k\equiv 0, 2(\text{mod } 3) \end{cases} k=2, \dots, n; f(u_1)=1。$

则 $f_1(V)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+2$, 因此 $\gamma_s(G_2)\leq 2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+2$, 故此时 $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+2$ 。

$$\textcircled{2} m=3t+1。 \text{与定理 1 中 } n=3k+1 \text{ 同理, 不妨设 } f(v_{n-1})=f(v_n)=f(v_1)=1, f(u_{n-1})=f(u_n)=f(u_1)=1, \gamma_s(G_2)=f(v_1)+ \\ \sum_{i=1}^l f(N[v_{3i+1}])+\sum_{j=1}^l f(N[w_{3j-1}])+f(u_1)+f(u_n)+\sum_{k=1}^l f(N[u_{3k}])\geq 2l+t+3=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+3。$$

在 $V(G_2)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i)=\begin{cases} -1, i\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, i\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} i=2, \dots, n; f_1(w_i)=\begin{cases} -1, j\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, j\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} j=1, \dots, m;$

$f_1(u_k)=\begin{cases} -1, k\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, k\equiv 0, 2(\text{mod } 3) \end{cases} k=2, \dots, n; f(u_1)=1。$

则 $f_1(V)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+2$, 因此 $\gamma_s(G_2)\leq 2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+3$, 故此时 $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+3$ 。

$$\textcircled{3} m=3t+2。 \text{与定理 1 中 } n=3k+1 \text{ 同理, 不妨设 } f(v_n)=f(v_1)=f(v_2)=1, f(u_n)=f(u_1)=f(u_2)=1, \gamma_s(G_2)=f(v_1)+f \\ (v_n)+\sum_{i=1}^l f(N[v_{3i}])+\sum_{j=1}^l f(N[w_{3j}])+f(u_1)+f(u_n)+\sum_{k=1}^l f(N[u_{3k}])\geq 2l+t+4=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+4。$$

在 $V(G_2)$ 上定义函数 f_1 数使得 $f_1(v_i)=\begin{cases} -1, i\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, i\equiv 0, 2(\text{mod } 3) \end{cases} i=2, \dots, n; f_1(w_i)=\begin{cases} -1, j\equiv 1(\text{mod } 3) \\ 1, j\equiv 0, 2(\text{mod } 3) \end{cases} j=1, \dots, m;$

$f_1(u_k)=\begin{cases} -1, k\equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1, k\equiv 1, 2(\text{mod } 3) \end{cases} k=2, \dots, n。$

则 $f_1(V)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+4$, 因此 $\gamma_s(G_2)\leq 2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+4$, 故此时 $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+4$ 。

综上, 令 $\lambda=2n(\text{mod } 3)+m(\text{mod } 3)$ 。当 $\lambda=0$ 时, $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]$; 当 $\lambda\neq 0$ 时, $\gamma_s(G_2)=2\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{m}{3}\right]+|\lambda-2|$ 。

参考文献:

- [1] DUNBAR J E, HEDETNIEMI S T, HENNING M A, et al. Signed domination in graphs[J]. J Shanghai Univ, 2006(10):4-8.
- [2] BONDY J A, MURTY V S R. Graph theory with applications[M]. Amsterdam: Elsevier, 1976.
- [3] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Signed domination in graphs[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1998.
- [4] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [5] 徐保根. 图的控制与染色理论[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2013.
- [6] 徐保根. 关于图的符号星控制数[J]. 华东交通大学学报, 2004, 21(4): 116-118.
- [7] 徐保根. 两类图的符号星控制数[J]. 华东交通大学学报, 2005, 22(4): 146-148.
- [8] 徐保根. 偶图符号控制数的下界[J]. 华东交通大学学报, 2014, 31(6): 93-95.
- [9] 徐荣贵, 孔祥阳, 徐保根. 两类特殊图的控制数[J]. 江西科学, 2015, 33(1): 57-58.

On Signed Domination Numbers for Two Classes of Graphs

Yan Yunjuan, Xu Baogen, Feng Dayi

(College of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $G=(V, E)$ be a graph, a function $f: V \rightarrow \{1, -1\}$ is said to be a signed dominating function (SDF); when $S \subseteq V$, there is the following $f(S) = \sum_{v \in S} f(v)$. If $f(N[v]) \geq 1$ holds for all $v \in V$, the signed domination number is $\gamma_s(G) = \min \{|f|(V) | f \text{ is an SDF of } G\}$. In this paper, the signed domination problem for two classes of special graphs is researched and the signed domination numbers of $C(n, m) = C_n P_m$ and $C(n, m, n) = C_n P_m C_n$ are obtained.

Key words: graph; signed dominating function; signed domination number

(责任编辑 姜红贵)