文章编号:1005-0523(2018)01-0001-08

Bayes统计学与MCMC方法

——Metropolis-Hastings(M-H)算法的Matlab程序实现

陈梦成,方　苇,杨　超,谢　力

(华东交通大学土木建筑学院,江西 南昌 330013)

摘要:Bayes统计学能够从空中楼阁的理论广泛地落地于自然科学、经济学和社会学等领域,得益于计算机技术和马尔可夫链蒙特卡洛(Markov chain Monte Carlo,简称MCMC)法的发展。文章介绍了MCMC方法在Bayes推断中的应用,主要讨论了MCMC方法中的独立抽样和随机游走抽样的Metropolis-Hastings(M-H)算法,利用可读性较强的Matlab程序来实现两种抽样算法,并给出了详细的程序实施过程,分析了两种抽样的优缺点。模拟分析结果表明:独立抽样M-H算法比较容易实施,但是要求建议分布和后验分布的吻合度较高,否则计算效率低下,而且模拟效果不理想;随机游走抽样的M-H算法不需要建议分布接近后验分布,模拟效果也比较好,因此,克服了独立抽样算法的不足,适用范围更广。

关键词:Bayes;MCMC;M-H法;Matlab程序

中图分类号:C829.29　　**文献标志码**:A

著者最初对Bayes统计学推断法产生兴趣,可以追溯到2014年对加拿大西安大略大学的访学。在访学期间,师从国际著名结构工程专家Hong Hanping教授和Zhou Wenxin教授,从事Bayes推断法在油气管道失效评估中的应用研究,并深刻感悟到Bayes推断法的卓越性和趣味性。回国以后,笔者一直尝试将Bayes推断法用于全寿命周期内土木工程结构性能退化与剩余寿命评估方面,阅读文献的过程中发现这方面的国内外研究成果非常有限[1-3];因此,决定写一篇有关Bayes推断统计学中的热点话题——MCMC方法的文章。众所周知,MCMC方法是一种利用计算机强大计算能力与仿真能力的Bayes推断方法[4-7]。然而,即使计算机能力再强大,由于程序设计有优有劣,用MCMC方法进行统计推断时也会出现有时成功,有时失败的结果。至今为止,虽然已经有一些统计方面的软件(如WinBUGS和OpenBUGS)包含MCMC方法[8-11],由于看不到源码,很难根据实际问题进行二次开发;即使网上公开的一些MCMC源程序,很多情况下也得不到正确解。基于这个理由,本文在忠实追求MCMC理论框架的同时,用Matlab语言编制了一个可读性较强的源程序,并对该程序的运行结果进行分析和讨论。

1　贝叶斯推断

本节拟对贝叶斯推断法做一个简单介绍。为此,我们先从传统的非Bayes统计学开始介绍。以硬币投掷为例,考虑硬币投掷1次后出现正面的概率θ的问题,用随机变量X来表示投掷硬币正反面出现的结果,也就是考虑当硬币出现正面(取$X=1$)和出现反面($X=0$)的概率问题。由于$X=1$的概率是θ,$X=0$概率是$(1-\theta)$,当随机变量X取x(=0或1)时的概率可以用下式表示为

$$P=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x} \tag{1}$$

收稿日期:2017-12-20

基金项目:国家自然科学基金(51378206)

作者简介:陈梦成(1962—),男,教授,博士,博士生导师。主持完成国家科技部973计划前期研究专项课题,国家自然科学基金项目,江西省重点自然基金项目等40余项。获江西省自然科学二等奖2项,科技进步奖1项,江西省高校优秀科技成果一等奖1项,三等奖1项。出版专著1部,参与编著1部,参与编制江西地方规程1部,获得国家发明专利4项,实用新型7项。在力学学报,Inter J Numer Metaods和Inter J Solids Struct等国内外学术刊物和国内外学术会议上发表论文200余篇,SCI,EI,ISTP收录80余篇。主要研究方向为计算与实验断裂力学,工程结构材料耐久性,组合结构。

从上式可以看出,当 x 给定时,式(1)为 θ 的函数,又称似然函数。在传统的统计学推断理论中,未知参数 θ 由似然函数的极值法(极大似然函数法)确定。下面来观察 n 次硬币投掷的过程。假定 n 次硬币投掷后,共有 X 回正面出现。众所周知,X 取观测值 $x(=0,1,\cdots,n)$时的概率分布服从二项分布,即

$$P=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x} \tag{2}$$

上式和前述一样,如果 x 给定的话,是 θ 的函数,是似然函数。根据似然函数的极值法,要使似然函数取得极值,就是要使式(2)对参数 θ 取得极值,据此,当 $\theta=x/n$(参数 θ 的点推断)时似然函数取得最大值。推断值 $\theta=x/n$ 实际上表示硬币投掷 n 次后正面出现的比率,直观上就能得出的这个结论。

下面来考察一下 θ 的点推断值具有什么样的特征?谈到特征,由于 x/n 是一个常数,因此,x/n 不应该会有什么特征。然而,话题不能到此为止。由于 x 原本是随机变量 X 的观测值,所以我们应该讨论 X/n,而不是 x/n 的特征。众所周知,X/n 是由独立同分布函数生成的样本数据的平均值,根据中心极限定理,当 n 取得足够大(n=30 即可)的时候,可以认为 X/n 服从均值为 θ,方差为 $\theta(1-\theta)/n$ 的正态分布。这样,如果 X/n 作为 θ 的点推断值,则可以认为其期望值就是 θ(无偏估计值),并能构建显著性检验(如:检验 $\theta=1/2$ 是否正确)。

将这个问题作更一般叙述。当 θ 给定时,$X=x$ 的概率用 $p(x|\theta)$表示。当 x 给定时,$p(x|\theta)$是似然函数。似然函数取得最大值时有 $\theta=\hat{\theta}$,是 x 的函数,记为$\hat{\theta}(x)$;另外,由于 x 原本是一个随机变量 X,则$\hat{\theta}(x)$可改写为$\hat{\theta}(X)$,也是一个随机变量,所以$\hat{\theta}(X)$具有随机变量的各种特征。利用这些特征可以进行推断和检验。

一言以蔽之,在传统统计学中,未知参数 θ 是个常数,并不是随机变量,不存在着分布。然而,在贝叶斯统计学中是以未知参数 θ 为随机变量作为讨论的出发点,具有不确定性,参数空间 T 中每个未知参数 θ 值对应着一个分布。这是传统统计学和贝叶斯统计学的核心区别[12],也是传统统计学和贝叶斯统计学之间在哲学上迄今争论不休的原因。本文不打算卷入他们这种纷争。姑且认为 θ 是个随机变量,它与数据 X 的联合分布,使用条件分布后,可以表示成以下形式

$$p(x,\theta)=p(x|\theta)p(\theta)=p(\theta|x)p(x) \tag{3}$$

由上式可以直接得到下式

$$p(\theta|x)=p(x|\theta)p(\theta)/p(x)\propto p(x|\theta)p(\theta) \tag{4}$$

式(4)即为贝叶斯定理,贝叶斯推断中利用贝叶斯定理来连接先验分布和后验分布。其中:$p(\theta)$为参数 θ 的先验分布,$p(\theta|x)$为参数 θ 的后验分布,$p(x|\theta)$为似然函数,$p(x)$为 x 的边缘分布。在 Bayes 统计学中,从 θ 的先验分布出发,用观测数据对先验分布进行修正,修正后的分布表现形式即为后验分布。值得注意的是,此时 x 不再是随机变量(后验分布是 x 为给定时的 θ 条件分布)。另外,由于边缘分布是个定值,所以后验分布与先验分布和似然函数的乘积成比例,在下述的后验分布抽样中可以不考虑边缘的似然性。后验分布是普通的概率分布,因此可以直接用这个分布对 θ 进行各种推断(譬如用后验分布的模式和平均值作为 θ 的推断值)。由此可见,Bayes 统计学中的后验分布和传统统计学中的$\hat{\theta}(X)$分布属于两个体系,但相对而言,可以认为它们的概念属地相同。顺便提一下,当先验分布不确定时,可以假定其服从均匀分布。从这个意义上讲,笔者认为 Bayes 统计学包含了传统统计学内容,而且,在经济学等社会科学中其先验分布的假定通常是按主观意识进行的,可以很好地将 Bayes 统计学应用于社会科学之中。

综上所述,在 Bayes 统计学中,先验分布是主观的,可以凭借经验与历史事实进行假定,主要认为是依据先验分布和样本数据确定。但事实上,在很多情况下要用解析方法很难获得后验分布。此时最可行的方法就是采用程序编制的马尔卡夫链蒙特卡洛(MCMC)数值模拟法。

2 基于 Metropolis-Hastings(M-H)法的贝叶斯推断

在具体介绍 MCMC 方法的内容之前,先对贝叶斯统计学和传统统计学中可以共同利用的随机数(样本信息)的推断方法进行阐述,并且探讨一下如何推断硬币投掷 n 次后正面出现的概率 θ 问题。如前所述,假

如取正面出现的次数为 X，则 θ 的推断值为$\hat{\theta}=X/n$。由此可见，$\hat{\theta}(X)$的概率分布是这个推断问题的核心。

前文已经指出，依据中心极限定理，$\hat{\theta}$的分布服从正态分布。然而，对那些不了解中心极限定理的人来说，是否还有其它方法可以确定$\hat{\theta}$的分布呢？在计算机出现以前，这个问题的回答是否定的，但如今并非如此，利用 MCMC 数值模拟方法，即使是一个统计学的门外汉也可以得到$\hat{\theta}(X)$的大概分布形式。其实，求解原理很简单，即假设真实参数 θ 为适当值，观测硬币投掷 n 次后的实际结果。用 X 记录正面出现的次数，由此可得到一个值 X/n；接着，再投掷 n 次，可得到第二个 X/n 值；如此反复投掷硬币可得到无数个 X/n。根据这些无数个 X/n 值，绘出直方图，可以认为这个图大概反映了 X/n 的概率分布。当然，随机数的生成实际上没必要去依赖投掷硬币，而可以全部由计算机来实现。这种模拟的本质就是，通过符合$\hat{\theta}(X)$分布的抽样（计算硬币实际投掷 n 次后正面出现的比例）达到了解$\hat{\theta}(X)$的概率分布目的。因此，假如能够实现这种抽样的话，那么根据这些样本数据就很容易绘出直方图。

与传统统计学中$\hat{\theta}(X)$的概率分布相对应的贝叶斯统计学中$\hat{\theta}(X)$的分布称为后验分布。因此，在贝叶斯统计学中若能从后验分布抽样，那么依据后验分布进行推断，在理论上是完全可行的。当然，如果能直接用解析法获得后验分布形式，就没有必要使用数值模拟，这就如同使用中心极限定理获得$\hat{\theta}(X)$的概率分布后而没有必要进行数值模拟一样。然而，由于先验分布的假定多源自于分析者的自由构想，所以一般利用解析法导出后验分布是不可能的，而是求助于从后验分布进行抽样进行数值模拟。当下流行的手法当数 MCMC 数值模拟方法。

马尔卡夫链的最终状态平稳分布常常是存在的，但是不一定是唯一的。我们利用马尔科夫链希望产生唯一的平稳分布，这需要产生具有遍历性的马尔可夫链。用 MCMC 方法进行数值模拟时，首先需要构造一条马尔可夫链，使其平稳分布为参数 θ 的后验分布，然后通过构造出的这条马尔卡夫链生成样本序列，截取其中已经收敛的有效样本计算 Bayes 推断中的参数期望值。M-H 算法是 MCMC 抽样算法的核心，本文通过 Matlab 实现了独立抽样和随机游走的 M-H 算法，并对其执行结果进行介绍。

2.1　独立抽样的 M-H 算法

首先，从均值为 μ，方差为 1 的正态分布中生成 10 个独立的样本数据，其均值为 5.098 1，然后，采用 MCMC 方法对相关参数 μ 进行推断。很显然，μ 的似然函数服从均值为 5.098 1，方差为 1/10 的正态分布，μ 的先验分布则假定服从自由度为 5 的 t 分布，因此，μ 的后验分布可以认为是正态分布与 t 分布之积。于是，参数 μ 的推断过程可以用三个 Matlab 函数程序来完成，它们简洁地给出如下：

```
% μ 的似然函数
function y=lieklihood(myu,data);
    y=(1/sqrt(2*pi*(1/data(2))))*exp(-(1/2)*(myu-data(1))^2/(1/datat(2)));
end

%μ 的先验分布~ t(5)
function y=prior(x);
    y=pdf('t',x,5);
end

%关于参数 x 的后验分布
function y=posterior(x,data);
    y= prior(x)* lieklihood(x,data);
end
```

需要注意的是在似然函数中参数是由参数“myu”和观测数据“data”构成的，这正是似然函数完全可以用参数和观测数据来描述的原因，它也与后验分布(posterior 函数)相似。此外，程序中的 data(1)存放样本数据均值 5.098 1，data(2)存放样本数据个数 10。

如果能从以上获得的后验分布进行直接抽样的话，问题就简单得多，然而事实并非如此，需要采用 M-H 抽样算法。M-H 算法简述如下：首先，采用一个尽可能与后验分布相近的建议分布进行抽样，其次，通过其它方式给定接受概率，最后，利用这个概率选择接受或者拒绝当前的抽样样本。正如大家所知的那样，这样得到的样本数据序列是一条经过一定时间 (燃烧期)、服从后验分布的样本数据链。本算例拟采用均值 5.0981，方差为 1/10 的正态分布作为建议分布。建议分布的抽样程序(函数 proposal_ran)和建议分布的密度函数(函数 proposal_pdf)程序给出如下：

```
%建议分布，依据μ的先验分布(自由度为 5 的 t 分布)与似然函数之积构成的后验分布确定。
%该建议分布与 myu0 无关，是一条独立链。
function y=proposal_ran(myu0);
    global data;
    y= data(1)+sqrt(1/data(2))*randn(1);
end

%建议分布的密度函数，该建议分布与此前μ样本值 myu0 的定义是彼此独立的(独立链)。
function y=proposal_pdf(myu0,myu_prime);
    global data;
    y=1/sqrt(2*pi/data(2))*exp(-(1/2)*(myu_prime-data(1))^2/(1/data(2)));
end
```

建议分布抽样程序给出了参数“myu0”，表示上一次从建议分布中抽出的样本值。在很多情况下一般均设定从建议分布中当前抽出的样本值依赖于上一次抽出的样本值。然而，正如本问题的程序没有使用这个“myu0”那样，从建议分布中抽出的样本值不依赖于过去的抽样样本，这就是所谓的独立链。下面给出建议分布密度函数 proposal_pdf，其参数是“myu0”和“myu_prime”。“myu0”前面已经介绍过，“myu_prime”表示当前从建议分布中抽出的样本值。用以上两个参数定义密度函数 y。需要注意的是，由于建议分布中使用了独立链，所以密度函数的表达式中没有出现“myu0”。

依据某一给定的接受概率选取由建议分布生成的样本程序给出如下：

```
%MH 算法样本选取程序
function y=selection(myu0,myu_prime,data);
      u=rand(1,1); %生成一行一列的(0,1)之间的均匀随机数
      numerator=posterior(myu_prime,data)*proposal_pdf(myu_prime,myu0);
      denominator=posterior(myuo,data)*proposal_pdf(myu0,myu_prime);
      selection_p=min(1,numerator/denominator);
if u<selection_p
      y=myu_prime;
else
      y=myuo;
end
end
```

selection 是以建议分布的上一次抽样样本“myu0”、当前抽样样本“myu_prime”以及观测数据作为参数的函数。样本数据的本质就是通过接受概率使用后验分布抽样的关系，也就是，用接受概率作为是否接受当前抽样样本的标准，如果是接受则输出当前抽样样本，否则输出上一次抽样样本。另外，Matlab 程序中给出了接受概率的定义，selection_p 函数表示。

```
numerator=posterior(myu_prime,data)*proposal_pdf(myu_prime,myu0);
denominator=posterior(myuo,data)*proposal_pdf(myu0,myu_prime);
selection_p=min(1,numerator/denominator);
```

使用以上程序进行 1 万次抽样,去掉其中初始抽样的 1 000 次(燃烧期)后得到的余下样本序列的时间序列图和直方图分别如图 1(a)和图 1(b)所示。整个问题的 Matlab 主函数程序参见附录 1。对于马尔卡夫链的燃烧期的选择,在学术上目前还没有一个统一的标准,本示例中燃烧期的选取根据时间序列图中所示的马尔卡夫链的收敛情况为初始抽样的 10%。

在本算例中,图 1(a)建议分布使用了正态分布,从得到的后验分布的抽样样本数据直方图图 1(b)来看,我们认为,该图明显地再现了正态分布,因此,就 M-H 算法而言,模拟结果令人感到非常满意。但是需要指出的是,独立抽样的 M-H 算法中要求建议分布与后验分布相近,当它们出现较大差异时,模拟结果不大理想,如图 1(c)和图 1(d)所示。因此,独立抽样的 M-H 算法作为单独的算法很少使用。

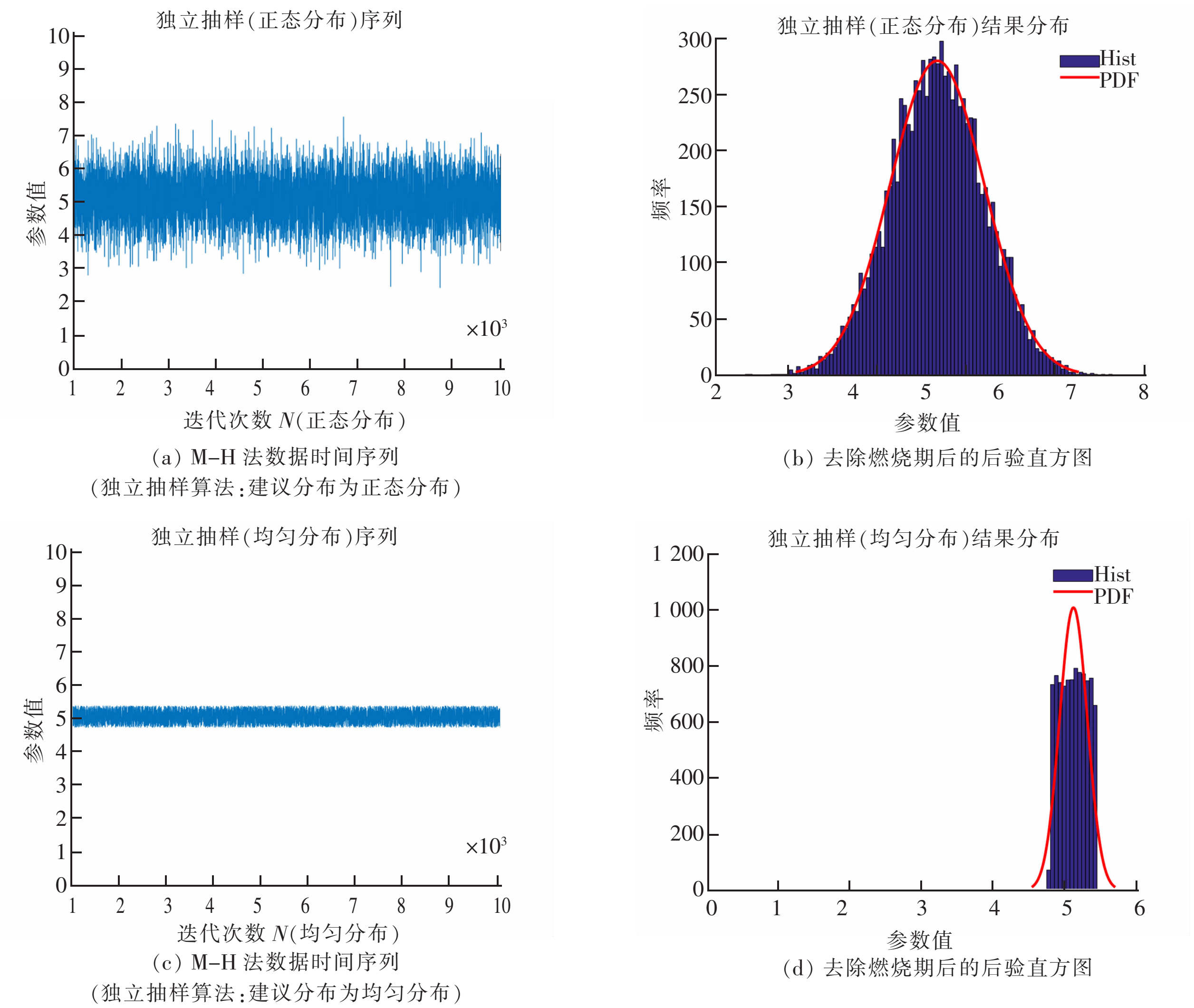


图 1　独立抽样的 M-H 算法的模拟结果(先验分布为 t 分布)

Fig.1　Simulation of M-H algorithm for independent sampling(prior distribution with “T” distribution)

2.2　随机游走 Metropolis 算法

在 M-H 算法抽样中,除了有独立抽样,还有随机游走抽样。本节拟讨论随机游走的 M-H 算法,并给出相应的模拟算例。由于只改变了建议分布,所以似然函数、先验分布和后验分布的 Matlab 程序无需改变,它

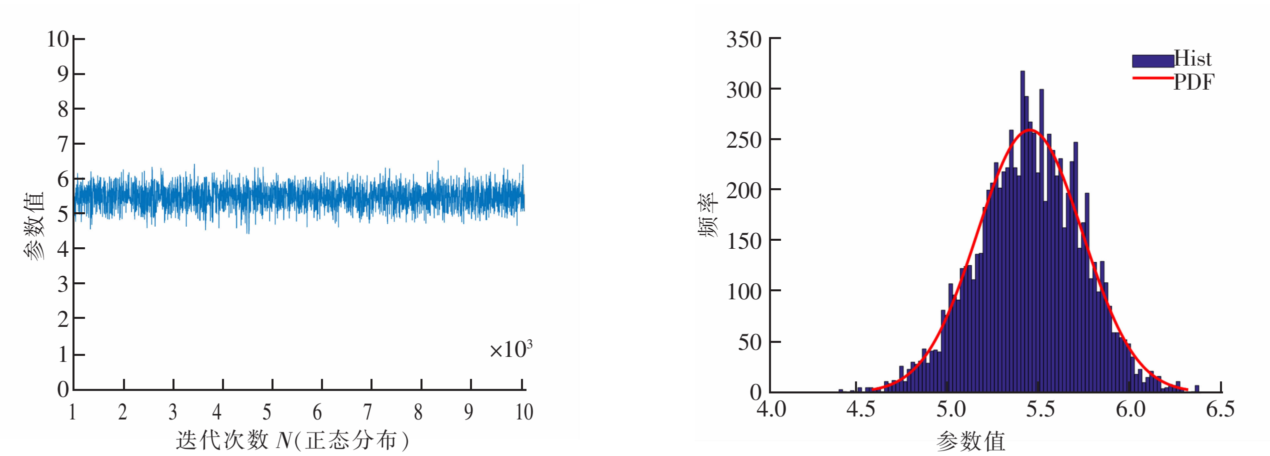
们的 Matlab 程序均与前述 2.1 节给出的相同。下面使用随机游走抽样的建议分布中,随机游走的误差项服从均值为 0,方差 tau_square=0.5 的正态分布(函数 proposal_ran_rw):

```
%建议分布,新的样本是由游走过程生成的。
function y=proposal_ran_rw(myu0);
    global tau_square;
    y=myu0+sqrt(tau_square)*randn(1);
end
```

与之相对应的建议分布的密度函数(函数 proposal_pdf_rw)如下:

```
%该建议分布与此前μ样本值 myu0 相关,遵循随机游走模型(游走链)。
function y=proposal_pdf_rw(myu0,my_prime);
    global tau_square;
    y=1/sqrt(2*pi/tau_square)*exp(-(1/2)*(myu_prime-myu0)^2/tau_square);
end
```

依据某一给定的接受概率选取随机游走抽样建议分布生成的抽样样本程序可以完全与上一节的抽样样本程序一样。但是,由于随机游走误差项的方差 tau_square 为全局变量,所以程序中使用了“global tau_square”语句。利用该程序抽样 1 万次,去掉初始抽样(燃烧期)1 000 次后的抽样样本序列的时间序列图和直方图如图 2(a)和图 2(b)所示。



(a) M-H 法数据时间序列
(随机移动的 M-H 算法:误差项正态分布)

(b) 去除燃烧期后的后验直方图(误差项正态分布)

图 2 随机游走(误差项正态分布)M-H 算法的模拟结果(先验分布为 t 分布)

Fig.2 Simulation of M-H algorithm for randem walk sampling(error term mormal distribution)

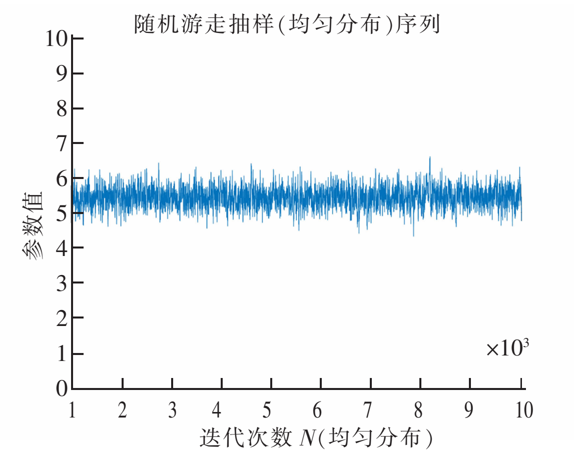
注意到尽管图 2 中的建议分布使用的是随机游走分布,与图 1 中使用的正态分布完全不同,但得到的抽样结果直方图几乎完全相同。虽说用的是随机游走,但最终得到的建议概率分布也不过是是服从以上一次样本数据为均值,0.5 为方差的正态分布。从这个意义上讲,难道建议分布摆脱不了正态分布的魔咒?为了防止读者对而对该抽样方法感到疑惑,下面再给出误差项服从样本区间(-0.5,0.5)的均匀分布的随机游走建议分布的模拟算例。与上一算例的不同之处在于建议分布的抽样程序和建议分布密度函数程序,它们分别列出如下:

```
%误差项服从均匀分布的随机游走链的建议分布,样本生成来自于随机游走过程(随机游走链)。
function y=proposal_ran_rw_unif(myu0);
y=myu0+ rand (1,1)-0.5;
end
```

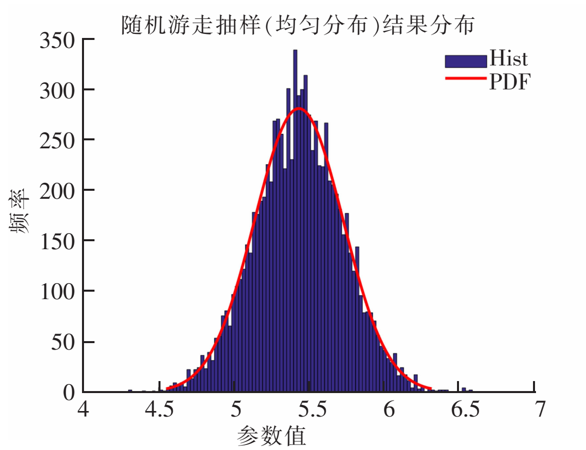
与其对应的建议分布的密度函数为常数(函数 proposal_pdf_rw),程序如下:

```
function y=proposal_pdf_rw_unif (myu0,my_prime);
y=1;
end
```

建议分布的密度函数“proposal_pdf_rw_unif 函数”反映了建议分布的均匀随机性,是个常数。这个程序运行结果如下图 3(a)和图 3(b)所示。图 3 完美再现了后验分布,再一次显示出 M-H 法的强大能力。



(a) M-H 法数据时间序列
(随机移动的 Metropolis 算法:误差项均匀分布)



(b) 去除燃烧期后的后验直方图(误差项均匀分布)

图 3　随机游走(误差项均匀分布)M-H 算法的模拟结果(先验分布为 t 分布)

Fig.3　Simulation of M-H algorithm for randem walk sampling(error term: uniform distribution)

3　结论

1) 通过可读性强的 Matlab 程序来实现了大家公认的、难度比较高的 M-H(Mestroplis Hastings)算法。在编制的源程序中,通过明确引入实参数和数据,计算什么,还需要什么,都一目了然。源程序包括了 M-H 法中的独立抽样(独立链)和随机游走抽样算法。

2) 在独立抽样 M-H 算法中,根据建议分布得到的前后两次样本值是相互独立的,因此马尔卡夫链的计算效率相对较低;当建议分布与后验分布接近的时候,马尔卡夫链收敛速度快,可以得到很准确的计算结果;但是实际应用中,后验分布的形式往往并不明确,若建议分布与后验分布差别很大时,独立抽样算法的表现较差,甚至无法收敛。

3) 在随机游走 M-H 算法中,根据建议分布得到的当前样本值与前一次样本值是相关的,克服了独立抽样 M-H 算法计算效率较低的缺陷。文中分别给出了随机游走误差项服从正态分布和均匀分布作为最终建议分布的样 M-H 算法的源程序,并给出了相应算例,均得到了计算效率高、收敛速度快的马尔卡夫链和精确的计算结果。该算法可用于贝叶斯推断过程中后验分布有时无法明确的情况。

参考文献:

[1] EERIGHT M P. Service-life prediction of deteriorating concrete bridges[J]. Journal of Structural Engineering,1998,124(3):309-317.

[2] CHEUNG S H,BECK J L. Bayesian model updating using hybrid monte carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters[J]. Journal of Engineering Mechanics,2009,135(4):243-255.

[3] WAN HUAPING,REN WEIXIN. Parameter selection in finte element model updating by global sensitivity analysis using gaussian process metamode[J]. Journal of Structural Engineering,2015,141(6):1-10.

[4] 李硕豪,张军. 贝叶斯网络结构学习综述[J]. 计算机应用研究,2015,32(3):641-646.
[5] CHIB S. Chapter 57 markov chain monte carlo methods: computation and inference[J]. Handbook of Econometrics,2001,5(1):3569-3649.
[6] 伊庭幸人,種村正美,大森裕浩,et al. 鈃算統鈃Ⅱマルコフ連鎖 モンテカルロ法とその周辺[M]. 东京:岩波書店,2005.
[7] 王双成,高瑞,杜瑞杰. 具有超父结点时间序列贝叶斯网络集成回归模型[J]. 计算机学报,2017(40):1-16.
[8] PC LAMBERT,AJ SUTTON,PR BURTON et al. How vague is vague? A simulation study of the impact of the use of vague prior distributions in MCMC using winBUGS[J]. Statistics in Medicine,2005,24(15):2401-2428.
[9] 余芳. 基于 MCMC 方法的 WinBUGS 软件应用[J]. 经营管理者,2010(15):303-303.
[10] SURHONE L M,TENNOE M T,HENSSONOW S F. OpenBUGS[M]. Betascript Publishing,2010.
[11] KUMAR R,KUMAR SRIVASTAVA A,KUMAR V. Exponentiated gumbel model for software reliability data analysis using MCMC simulation method[J]. International Journal of Computer Applications,2013,62(20):24-32.
[12] 韦来生,张伟平. 贝叶斯分析[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社,2013.

Bayesian Statistics and MCMC Method

——Matlab Programming for Metropolis-Hastings(M-H)Algorithm

Chen Mengcheng,Fang Wei,Yang Chao,Xie Li

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Bayes statistics in a vacuum can be broadly applied to the fields of natural science, economics and social science, which benefits from the development of computer science and technology and Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method. In this paper the application of MCMC method into Bayes inference was introduced, and independent sampling and random walk sampling of Metropolis-Hastings(M-H) algorithm were mainly discussed. The two sampling modes were readably programmed with Matlab, and their detailed implementation processes, merits and demerits were talked about. It was shown by present simulation that, the independent sampling mode is relatively easy to implement, but need the proposal distribution to be close to the posterior distribution; otherwise, the calculation efficiency is low and the simulation effect is unsatisfactory. The random walk sampling mode don't need the proposal distribution to approach the posterior distribution and its simulation results are satisfactory. Therefore, it overcomes the limitations of the independent sampling mode has more widespread application.

Key words: bayes; MCMC method; M-H algorithm; Matlab program