第35卷第2期 华东交通大学学报 Vol.35 No.2
2018年4月 Journal of East China Jiaotong University Apr., 2018

文章编号:1005-0523(2018)02-0120-10

张量分解算法研究与应用综述

熊李艳[1],何 雄[1],黄晓辉[1],黄卫春[2]
(1. 华东交通大学信息工程学院,江西 南昌 330013;2. 华东交通大学软件学院,江西 南昌 330013)

摘要: 张量分解是处理大规模数据的一种方法,它能有效的对数据进行降阶,由于高阶张量具有唯一性、对噪声更鲁棒、不破坏原数据的空间结构和内部潜在信息等优点,因此被广泛应用于神经科学、信号处理、图像分析、计算机视觉等领域。论文首先对传统的降维方法进行了介绍,指出这些方法存在的问题和不足。其次对张量分解的三种经典算法:CP分解、Tucker分解以及非负张量分解从算法的求解、基本思想、算法框架以及算法应用等方面进行概括分析,对CP分解算法和Tucker分解算法从多角度进行对比分析。最后对张量分解的现状以及实际应用进行了归纳和总结,并对未来的研究发展趋势进行了分析和展望。

关键词: 张量;CP分解;Tucker分解;非负张量分解
中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A

1 数据降维及张量概述

随着互联网时代的不断发展,数据规模越来越大,数据的结构往往具有高维特性,对高维数据进行处理,人们可以挖掘出有价值的信息。但是数据维度越高,数据处理难度越大,计算复杂度的增加往往会带来“维度灾难(Curse of dimensionlity)”,为了避免“维度灾难”,在传统的处理方法中,人们往往通过维数约简的方法对高维数据进行降维处理。传统的维数约简方法能够对数据进行有效的降维,如独立成分分析(ICA)[4]、主成分分析(PCA)[1-2]、线性判别分析(LDA)[5-6]、局部特征分析(LFA)[7-8]等。基于核函数的非线性维数约简方法有:基于核函数的独立主成分分析(KICA)[9]、基于核函数的主成分分析(KPCA)[10-11]、基于核函数的决策分析(KDA)[12]等等。在对数据降维的过程中,传统的维数约简方法不可避免的破坏原数据的几何结构,在对数据降维和特征提取的过程中,往往会对原始数据造成一定的损失,在这种情况下,张量以其不损坏数据的内在结构和潜在信息而受到广泛关注,将数据表示成张量结构能有效的解决高阶数据问题。

张量是一个多维数组,一阶张量是向量,二阶张量是矩阵,三阶及以上张量称之为高阶张量[3]。在实际应用中,张量实现了对问题更准确的建模。对于具有张量结构的高阶数据,可以通过对张量数据进行分解以减少数据的损失,降低计算的复杂度,从而保留原始数据的信息和特征。本质上,张量分解是一种高阶数据的分解方法,在社交媒体,学术趋势研究,社区演化等领域均可用张量分解进行数据分析。在学术领域,传统的

收稿日期: 2018-00-00
基金项目: 江西省研究生创新基金(YC2016-S261);国家自然科学基金项目(61363072,61462027,6156202);江西省自然科学基金项目(2016BAB212050);江西省科技成果转移转化计划项目(20161BB190032,20142BB190027)
作者简介: 熊李艳(1968—),女,教授,研究方向为数据挖掘机器学习。

方法往往研究的是数据的单一特征，如<作者，论文>的关系。然而，在现实世界中，数据往往表现的是高阶关系，例如<作者，论文，关键字>，<用户，产品，标签>等。

张量分解最经典的分解方法为 CP 分解和 Tucker 分解，CP 分解的思想是将一个 N 阶张量分解为若干个秩一张量和的形式，CP 分解能够保证分解结果的唯一性，但 CP 分解对应的秩求解是一个 NP 难题，在 Kolda[3]的文章中给出张量秩的近似求解方法。Tucker 分解的思想是将原张量分解成核心张量和因子矩阵乘积的形式，核心张量保留原张量的主要信息。在现有经典算法的基础上，矩阵的算法和理论思想已经推广到了高阶张量，并取得了一系列的研究成果。近年来，张量分解在神经科学[13–18]、信号处理[19–22]、数据挖掘[23,24]、图像分析[25–26]等领域的发展日趋成熟。

现在已有相关的英文综述文章和论著对张量分解相关算法进行总结和概述[3]，但有关张量分解算法，包括 CP 分解、Tucker 分解和非负张量分解算法及其具体应用方面的资料，尤其是中文综述资料较少。另一方面，对这些理论和技术的典型应用的总结还不多见，本文希望抛砖引玉，为相关领域同行的研究提供一个参考。

在本文中，我们首先对张量分解中最经典的算法 CP 分解和 Tucker 分解进行对比分析，对 CP 分解、Tucker 分解和非负张量分解在前人的研究基础上进行了归纳和总结，并给出了这些经典算法的求解方法。最后从人脸识别、信号处理、个性化推荐的领域详细举例说明近来它们的典型的应用。

2 符号参数和相关运算

论文中，向量（一阶张量）用小写粗体字母表示，如：$\boldsymbol{a}$，矩阵（二阶张量）用大写粗体字母表示，如：$\boldsymbol{A}$，张量（三阶及以上张量）用欧拉粗体字母表示，如：χ，常量用小写不加粗字母表示，如：a。向量 a 中的第 i 个元素用 a_i 表示，矩阵 A 中的第(i,j)个元素用 a_{ij} 表示，张量χ 中的第(i,j,k)个元素用χ_{ijk} 表示，取值范围为$(1,I)$，即：$i=1,\cdots,I$。符号“$\circ$”表示向量的外积，序列中的第 n 个元素表示为：$A^{(n)}$。

对于矩阵 $A\in R^{I\times J}$，$B\in R^{K\times L}$，$A\otimes B$ 表示矩阵的 Kronecker 积，$A\in B$ 表示矩阵的 K–R 积，$A{*}B$ 表示矩阵的 Hadamard 积，运算如下：

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1J}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2J}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}B & a_{I2}B & \cdots & a_{IJ}B \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{B}=[a_1\otimes b_1 \quad a_2\otimes b_2 \quad \cdots \quad a_K\otimes b_K] \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}{*}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1J}b_{1J} \\ a_{21}b_{21} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{2J}b_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}b_{I1} & a_{I2}b_{I2} & \cdots & a_{IJ}b_{IJ} \end{bmatrix} \tag{3}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}\in R^{I\times J}$，$\boldsymbol{B}\in R^{K\times L}$，$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 运算后矩阵的大小为$(IK)\times(JL)$，$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{B}$ 运算后矩阵的大小为$(IJ)\times(K)$，$\boldsymbol{A}{*}\boldsymbol{B}$ 运算后矩阵的大小为 $I\times J$，$\|A\|$ 表示矩阵 A 的奇异值之和，$\|A\|_{2,1}=\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|$ 表示矩阵 A 的 $e_{2,1}$ 范数，a_i 表示矩阵A 的第 i 列。

3 CP 分解和Tucker 分解比较

表 1 CP 分解和 Tucker 分解比较

Tab. 1 Comparison of the CP decomposition and the Tucker decomposition

项目	CP 分解	Tucker 分解
数学表达式	$\boldsymbol{\chi}\approx[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]\approx\sum_{r=1}^{R}\boldsymbol{\lambda}_r a_r\circ b_r\circ c_r$	$\boldsymbol{\chi}\approx\boldsymbol{G}\times_1 A\times_2 B\times_3 C\approx\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{r=1}^{R}g_{pqr}a_p\circ b_q\circ c_r$
张量 $\boldsymbol{\chi}$ 分解后相关矩阵和变量	其中 R 为张量分解次数,矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为张量 $\boldsymbol{\chi}$ 分解后的三个子矩阵 $\boldsymbol{A}\in R^{I\times R}$,$\boldsymbol{B}\in R^{K\times R}$,$\boldsymbol{C}\in R^{K\times R}$, $\boldsymbol{\lambda}$ 为分解后的权重向量	矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为分解后的矩阵,$\boldsymbol{A}\in R^{I\times R}$,$\boldsymbol{B}\in R^{J\times R}$,$\boldsymbol{C}\in R^{K\times R}$,核心张量 $\boldsymbol{G}$ 的大小 $r_1\times r_2\times r_3$
张量 $\boldsymbol{\chi}$ 在位置索引(i,j,k)上对应的元素	$\chi_{i,j,k}\approx\sum_{r=1}^{R}\lambda_p a_{ip}\circ b_{jp}\circ c_{kp}$	$\chi_{i,j,k}\approx\sum_{p=1}^{P_1}\sum_{q=1}^{Q_1}\sum_{r=1}^{R_1}g_{mnl}a_{im}\circ b_{jn}\circ c_{kl}$
不同点	对应的为秩-1 张量,CP 分解是秩与低秩近似,能保证分解唯一性	分解后包含一个核心张量,核心张量的维度可以指定,Tucker 分解的唯一性不能保证
相关性	当核心张量是对角且各个维数相同时,CP 分解和 Tucker 分解一致, 在这种情况下,CP 分解是 Tucker 分解的一种特殊形式,对于 CP 分解和 Tucker 分解,两者都可以加约束	

式中:P,Q,R,I,K 均为对应矩阵中的雄度值;p,q,r 均为对应矩阵中的参数值。

4 张量分解的三种经典算法

4.1 CP 分解及其算法

对于三阶张量,Tucker 分解的数学表达式为:

$$\boldsymbol{\chi}\approx[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]\approx\sum_{r=1}^{R}\lambda_r a_r\circ b_r\circ c_r \tag{4}$$

若分解后的矩阵 A,B,C 对应的列被正则化,则分解后存在一个权重向量 λ,公式(4)转化如下:

$$\boldsymbol{\chi}\approx[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]\approx\sum_{r=1}^{R}\lambda_r a_r\circ b_r\circ c_r \tag{5}$$

对于一般的 N 阶张量,CP 分解的形式为:

$$\boldsymbol{\chi}\approx[\lambda;A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(N)}]\equiv\sum_{r=1}^{R}\lambda_r a_r^{(1)}\circ b_r^{(2)}\circ a_r^{(N)} \tag{6}$$

CP 交叉最小二乘法(CP-ALS)是 CP 分解应用最经典的算法,算法如下:

a) 已知:原始张量 $\boldsymbol{\chi}$

b) 初始化:$A^{(n)}\in R^{In\times R}$,其中 $n=1,\cdots,N$

c) 循环 $n=1,\cdots,N$

$\boldsymbol{V}\leftarrow A^{(1)T}A^{(2)}*\cdots*A^{(n-1)T}A^{(n-1)}*A^{(n+1)T}A^{(n+1)}*\cdots*A^{(N)T}A^{(N)}$

$A^{(n)}\leftarrow X^{(n)}(A^{(N)}*\cdots*A^{(n+1)}*A^{(n-1)}*\cdots*A^{(1)})\boldsymbol{V}$

得到规范列 $A^{(n)}$和 λ

迭代结束

d) 最终输出:$\lambda,A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(N)}$

程序结束。

4.2　Tucker 分解及其算法

对于三阶张量,Tucker 分解的数学表达式为:

$$\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{G}\times_1\boldsymbol{A}\times_2\boldsymbol{B}\times_3\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{G},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]=\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{r=1}^{R}g_{pqr}a_p\circ b_q\circ c_r \tag{7}$$

对于一个三阶张量$\boldsymbol{\chi}\in R^{I\times J\times K}$,Tucker 分解可以将张量$\boldsymbol{\chi}$分解成三个因子矩阵$\boldsymbol{A}\in R^{I\times P}$,$\boldsymbol{B}\in R^{J\times Q}$,$\boldsymbol{C}\in R^{K\times R}$和一个核心张量$\boldsymbol{G}\in R^{P\times Q\times R}$的形式,因子矩阵称为对应模上的基矩阵,因子矩阵也称为该模上的主成分,因此 Tucker 分解又称为高阶奇异值分解。

将公式(7)推广到 N 阶即:

$$\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{g}\times_1 A^{(1)}\times_2 A^{(2)}\cdots\times_{(N)}A^{(N)}=[\boldsymbol{g};A^{(1)},A^{(2)},\cdots A^{(N)}] \tag{8}$$

写成矩阵形式即:

$$\boldsymbol{\chi}_{(n)}=A^{(n)}G_{(n)}(A^{(N)}\otimes\cdots\otimes A^{(n+1)}\otimes A^{(n-1)}\cdots\otimes A^{(1)})^T,G_{(n)}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}) \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{g}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 中某一维度上的矩阵。

高阶奇异值分解算法(HOSVD)是 Tucker 分解应用最经典的算法,算法如下:

a)已知:原始张量$\boldsymbol{\chi}$

b)张量按模展开$\boldsymbol{\chi}_{(n)}$,$n=1,\cdots,N$

c)循环$n=1,\cdots,N$:计算奇异值分解$\boldsymbol{\chi}_{(n)}=U_k\sum_k V_k^T$,得左奇异值 U_k

循环结束

d)核心张量 $\boldsymbol{G}\leftarrow\boldsymbol{\chi}\times_1 A^{(1)T}\times_2 A^{(2)T}\cdots\times_N A^{(N)T}$

e)最终输出:$\boldsymbol{G},A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(N)}$

程序结束。

4.3　基于低秩表示的非负张量分解

在实际应用中,如何将样本划分到对应的低维子空间,是一个复杂问题。传统的划分方法有 SVD[56]、PCA[1-3]、LDA[5,6]、SSC[54]等,这些方法广泛应用于图像数量、人脸聚类等问题。稀疏表示衍生于压缩感知理论,数学模型表示如下:

$$\min_{Z,E}\ \|\boldsymbol{Z}\|_*+\lambda\|E\|_{2,1},\ \text{s.t.}X=XZ+E \tag{10}$$

其中$\|Z\|_*$为矩阵奇异值之和,模型(10)在人脸识别、图像分割等领域中应用广泛,通过不断迭代逼近进行求解,对于 3 阶张量 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{G}\times_1 U_1\times_2 U_2\times\cdots\times_N U_N$ 求其最优解可以通过下式得到:

$$\min\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\times_1 U_1\times_2 U_2\times\cdots\times_N U_N\|^2,\quad \text{s.t},\boldsymbol{G}\geqslant 0,U_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots,N) \tag{11}$$

对于式(10)中的低秩表示模型,在不考虑噪声的情况下,引入辅助变量 Z,式(1)转化如下:

$$\min\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\times_1 U_1\times_2 U_2\times_3 U_3\|^2+\lambda\|\boldsymbol{Z}\|_*,\quad \text{s.t }\boldsymbol{G}\geqslant 0,U_1\geqslant 0,U_2\geqslant 0,U_3\geqslant 0 \tag{12}$$

对于式(12),其增广拉格朗日函数 L 为:

$$L(U_1,U_2,U_3,\boldsymbol{G},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y})=\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{G}\times_1 U_1\times_2 U_2\times_3 U_3\|^2+\lambda\|\boldsymbol{Z}\|_*+\langle S,U_3-\boldsymbol{Z}\rangle+\mu/2\|U_3-\boldsymbol{Z}\|^2 \tag{13}$$

其中 S 为拉格朗日乘子,对于式子(13),一般采用 ADM 方法进行求解。

非负 Tucker 分解是 Tucker 分解在非负矩阵分解中的具体应用,算法如下:

a)已知:输入原始张量$\boldsymbol{\chi}$,初始化 $\boldsymbol{G}\geqslant 0$,$U^{(n)}\geqslant 0$,$n=1,\cdots,N$,迭代次数为 T

b)张量$\boldsymbol{\chi}$按模展开得 $A_{(n)}$,$n=1,\cdots,N$

c)循环 $\boldsymbol{Z}$

　循环 $n=1,\cdots,N$

　$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}\times_1 U^{(1)}\times_2\cdots\times_{(n-1)}U^{(n-1)}\times_{(n+1)}U^{(n+1)}\cdots\times_N U^{(N)}$

d)将 $\boldsymbol{Z}$ 按 n 模矩阵化为 Z_n

$U^{(n)} \approx (U^{(n)} * (X_n Z_n^T)) / (U^{(n)} Z_n Z_n^T)$

循环结束

e) $\boldsymbol{G}=\dfrac{\boldsymbol{G} * \boldsymbol{X} \times_1 (U^{(1)T}) \times_2 \cdots \times_N (U^{(N)})^T)}{G \times_1 (U^{(1)T}) U^{(1)} \times_2 \cdots \times_N (U^{(N)})^T U^{(N)}}$

循环结束

f) $\boldsymbol{\chi}$ 的重构张量：$\boldsymbol{G} \times_1 U^{(1)} \times_2 \cdots \times_N U^{(N)}$

程序结束。

5 张量分解的应用

5.1 人脸识别

随着信息技术的发展，人脸识别技术的研究取得了显著成果，利用分析比较人脸视觉特征信息进行身份鉴别，人脸识别方法[27-30]在发展的过程中已经走进大众生活。在实际应用中，对于输入的人脸图像或者视频流等数据，数据呈现的往往是高维的，并且这些数据往往由于像素维数较高，容易导致“维数灾难”的发生[31]，从而使问题处理非常困难。因此处理这些高维数据首先需要降维，在传统的降维方法中，一般采用独立成分分析[4]、主成分分析[1-2]、线性判别分析[5-6]等方法进行降维。但是利用传统的降维方法进行降维，由于噪声等因素的影响，不可避免的会丢失一些数据信息。针对上述降维方法中的缺陷，近年来，学者提出将图像数据处理成张量形式，并且这些元素都是非负的。在基于非负张量的人脸识别中，Welling[32]在2011年将NMF推广到非负张量，即正张量分解的不动点算法(PTF)，该算法能有效的最小化重构误差，对应任何秩的张量都能被分解，PTF不动点算法的性能优于奇异值分解算法。Kim[33]等人基于张量的Tucker模型，研究了NTF乘性迭代规则，由于数据张量通常具有多种模式并且是大规模的，现有算法在存储和计算时间方面都具有非常高的复杂度，NTF乘性迭代算法能显著的降低存储复杂性和运行时间。Tamir Hazan[34]等人从梯度的角度研究了NMF方法，通过梯度下降进行迭代求解，使数据的收敛速度更快，Chen[35]提出了NMF-ALS方法，该算法概述了数值分析中的强非负约束问题。

5.2 信号处理

由于矩阵模型在大多数时候并不能直观的表示人们需要处理的信号，因此将张量模型和张量分析方法应用于信号处理领域，需要进一步对数据进行处理。在传感器信号方面，文献[36]对张量分析的相关理论问题进行了深入的研究，提出了多个张量模型，如高阶奇异值分解(HOSVD)、高阶低秩逼近等多个张量分解模型，并将其应用于独立成分分析(ICA)等问题，文献[37,42]将PARAFAC分解应用于MIMO雷达中的多维谐波参数估计问题，利用PARAFAC分解的唯一性，构建基于张量分解的平行因子模型，该算法解决了矩阵求伪逆时可能带来的病态问题，收敛速度更快。除了PARAFAC分解，基于张量高阶特征分解(HOEVD)和高阶奇异值分解(HOSVD)也被应用于阵列信号处理。文献[38]提出了R-Dunitary Tensor-ESPRIT和Tensor-ESPRIT算法用于处理包括雷达、声呐、通讯、医学影像等的参数估计，该算法通过定义一个张量并利用奇异值分解(SVD)来处理信号子空间问题，该算法可以应用于任何基于多维空间的子空间参数估计问题，使参数估计的准确度得到很大的提高。文献[39]提出了基于子空间用于估计阻尼和延迟正弦波之和的方案，在低信噪比和紧密间隔的正弦波中，该算法优于当前张量和基于矩阵技术模型。在音频信号处理方面，文献[40]应用高斯混合模型和矢量量化(VQ-GMM)作为分类器，通过阈值判决区区分非静音和静音，对非静音将音乐、语音和背景音区分开来，准确率可达95%，另外，学者们也开始研究将高阶子空间分析应用于音频分类，文献[41]使用NMF方法设计了一个自动分类算法，可以对乐器声音进行分类，该分类器的分类效果的分类误差仅为1%，超过目前最先进的分类技术。当前应用比较成熟的还有图像处理，当医生对病人的心电图，脑电图等图像进行分析时，适合用张量进行建模分析[43-44]。

5.3 个性化推荐

在社会标签推荐系统中，在处理大量稀疏数据时算法复杂性较高，可能存在数据极度稀疏问题。在推荐

系统中,图模型推荐算法、协同过滤推荐算法等传统推荐算法具有较好的效果。传统的推荐算法主要分为两类:一类是对现有算法进行改进,Zhang Zi ke[45]提出了超图模型,该模型可以为资源分配标签,还可以通过协作标签检索资源,超图模型是一种对现有算法进行改进的算法。另一类是将社会标签中的数据进行降维,如PLSA 方法[46-47]可以直接用 MLE 来估计参数,该方法可以解决同义词和多义词的问题,利用了强化的期望最大化算法来训练隐含类,但是 PLSA 中训练参数的值会随着文档的数目线性递增。另外,PLSA 可以生成其所在数据集的文档模型,但却不能生成新文档的模型。Hofmann[48]等人提出了基于链接和基于内容结合的模型,该模型基于概率因子分解,可以识别出集合的主题,该模型绘制主题之间的关系以构建预测连接内容模型,Peter Mika[49]提出了三部图模型,该模型是传统二分模式的扩展。

Symeonidis 等人[50]首先提出了将结构完整并且本征结构稳定的高维数据应用到社会标签系统中,并且利用张量分解方法进行标签预测。文献[50]采用 3 阶张量方法,定义稀疏张量 Y,以值“1”表示用户在标签上进行了标记,而“0”则表示没有用户没有标记。该方法可以去除数据集中的部分噪音,在预测效果上比传统张量分解方法效果好。Rendles 等人[51]以正负来代表用户标签是否标记,如果用户对标签进行标记,则分类为“+”,否则分类为“-”,这种方法对用户标签的分类有效,但这种方法并不能在预测过程中为用户提供有效的标签序列。Rendles 等人[52]提出了一个新的推荐算法:PITF,它的主要思想是在张量分解时,考虑 3 个二维关系彼此之间的关联,PITF 分解本质上是一种 Tucker 分解,它具有特殊的线性时间复杂度的,和其他推荐算法相比,推荐质量上有了很大的提高。廖志芳等人[53]将 3 部图应用于社会标签系统的表示方法中,在应用张量分解模型进行处理时,预测结果召回率和精确度有所提高,但是当社会标签中的数据稀疏并且数据具有损失的情况下,处理的精度有待高。

5.4 张量分解的发展趋势和展望

在处理大规模数据,尤其当数据表现为非线性时,利用核函数将输入空间通过非线性变化映射到高维空间,可以大大的简化计算。Xiao[57]于 2016 年的文章中,利用基于核函数的方法应用于低秩矩阵表示中,提出了 RKLRR、RKLRS 和 RKNNLRS 算法,将聚类的性能提高了数倍,聚类的误差却比传统方法小很多。基于核函数的低秩矩阵表示方法目前只在低阶矩阵中有所进展, 对于将其应用于高阶张量数据还有待研究,这必然会成为在社区发现、推荐系统、信号处理等领域研究的方向之一,具有很大的研究价值和意义;Liu[58]于 2014 年的文章中,提出了基于图和低秩表示的非负张量分解算法(GNTF),图像的分类效果和现有分类算法相比有明显的提高,但在该方法中,并未选择约束项进行效果比较,同时也未考虑核函数对该算法性能上的优化,在该分类器中,选择合适的约束项,并将核函数应用其中,将会使分类器的性能得到进一步的提高,对算法的改进会有很好的效果。

在张量分解中,充分合理的利用高维数据的结构,对问题的建模非常重要,在 CP 分解中,求矩阵秩最小化问题,分析矩阵的内部结构信息对于矩阵的填充和恢复性能会有帮助。对于大规模的数据,基于现有的硬件条件,探索高效的、并行化的张量分解算法对问题的求解和实际应用具有重要的实用价值,如在矩阵核范数最小化问题中,奇异值分解是整个求解过程中最耗时的,如维数为 $m \times n$ 的矩阵中,时间复杂度为 $O(mn^2)$,在文献[59]中,提出了两种分段 SVD 信号处理算法,两种分段算法均能大大缩减处理时间。由前章节所述的实例中,我们对前述方法在大规模数据和高维信号分析与处理中的作用有所了解,这些理论为实际应用提供了理论支持。基于矩阵秩最小化、低秩矩阵恢复和核函数等原理或方法,利用张量分解充分挖掘大规模数据中的信息,以此设计合理的数学模型和算法,具有广阔的应用前景。

6 结束语

在本文中,我们分别介绍了张量分解算法中的经典算法:CP 分解、Tucker 分解以及非负张量分解,并对CP 分解和 Tucker 分解进行了全面的比较。尤其的,本文对上述三种经典算法从算法的求解方法、基本思想、算法框架等方面进行了概括分析,并给出了这三种算法的实现方案,从中,我们可以领略到这些经典模型在张量分解中的强大之处以及他们在实际应用中的广泛性和有效性。在文章的最后部分,我们从人脸识别、信

号处理、个性化推荐方面对现有的研究算法进行了分析和总结,介绍了最新的算法,并对该领域未来研究发展趋势进行了分析和总结。通过本文所述的实例,我们对张量分解在高阶数据分析与处理中的作用有了全面的了解,利用矩阵秩最小化和低秩矩阵表示等原理和方法,充分挖掘高阶数据中的信息,以此建立基于高阶张量分解的低秩矩阵表示模型,具有广阔的应用前景。

参考文献:

[1] ROWEIS S. EM algorithms for PCA and SPCA[J]. Advances in Neural Information Processing Systems,1999,10:626-632.

[2] WESTERHUIS J A,KOURTI T,MACGREGOR J F. Analysis of multiblock and hierarchical PCA and PLS models[J]. Journal of Chemometrics,2015,12(5):301-321.

[3] LUO J,GWUN O. A Comparison of sift,PCA-SIFT and SURF[J]. International Journal of Image Processing,2009,3(4):143-152.

[4] CALHOUN V D,LIU J,ADAL T. A review of group ICA for fMRI data and ICA for joint inference of imaging,genetic,and ERP data[J]. Neuroimage,2009,45(1):163.

[5] AOUADI H,KHEMAKHEM M T,JEMAA M B. An LDA Topic Model Adaptation for Context-Based Image Retrieval [M]//E-Commerce and Web Technologies. Springer International Publishing,2015:141-146.

[6] RAMAGE D,HALL D,NALLAPATI R,et al. Labeled LDA: a supervised topic model for credit attribution in multi-labeled corpora[C]//Conference on Empirical Methids in Notural Language precessing,2009:248-256.

[7] VINCENTI F,MENDEZ R,PESCOVITZ M,et al. A phase I/II randomized open-label multicenter trial of efalizumab,a humanized anti-CD11a,anti-LFA-1 in renal transplantation[J]. American Journal of Transplantation,2007,7(7):1770-1777.

[8] OSTERMANN G,WEBER K S C,ZERNECKE A,et al. JAM-I is a ligand of the β_2 integrin LFA-I involved in transendothelial migration of leukocytes[J]. Nature Immunology,2002,3(2):151-158.

[9] XU J,ZHAO J,MA B,et al. Fault Diagnosis of Complex Industrial Process Using KICA and Sparse SVM[J]. Mathematical Prob lems in Engineering,2013,2013(3):87-118.

[10] KUANG F,XU W,ZHANG S. A novel hybrid KPCA and SVM with GA model for intrusion detection[J]. Applied Soft Computing, 2014,18(C):178-184.

[11] LI J,LI X,TAO D. KPCA for semantic object extraction in images[J]. Pattern Recognition,2008,41(10):3244-3250.

[12] ZECHEL C. TIF2,a 160 kDa transcriptional mediator for the liganddependent activation function AF-2 of nuclear receptors[J]. Embo Journal,1996,15(14):3667-3675.

[13] MIWAKEICHI F,MART NEZ-MONTES E,VALDéS-SOSA P A,et al. Decomposing EEG data into space time frequency components using Parallel Factor Analysis[J]. Neuro Image,2004,22(3):1035.

[14] N RUP M,HANSEN L K,PARNAS J,et al. Decomposing the time-frequency representation of EEG using non-negative matrix and multi-way factorization[J]. University of Denmark,2006.

[15] HARSHMAN R A. Foundations of the PARAFAC procedure: Model and conditions for an"explanatory"multi-mode factor analysis[C]//UCLA Working Papers in. 1969.

[16] BECKMANN C F,SMITH S M. Tensorial extensions of independent component analysis for multisubject FMRI analysis[J]. Neuroimage,2005,25(1):294.

[17] DE VOS M,DE LATHAUWER L,VANRUMSTE B,et al. Canonical decomposition of ictal scalp EEG and accurate source localisation:principles and simulation study[J]. Computational Intelligence & Neuroscience,2007,2007(Q4):58253.

[18] VOS M D,VERGULT A,LATHAUWER L D,et al. Canonical decomposition of ictal scalp EEG reliably detects the seizure onset zone[J]. Neuroimage,2007,37(3):844-854.

[19] SIDIROPOULOS N,LATHAUWER L D,Fu X,et al. Tensor decomposition for signal processing and machine learning [J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2017,65(13):3551-3582.

[20] CICHOCKI A,MANDIC D,LATHAUWER L D,et al. Tensor decompositions for signal processing applications:from two-way to multiway component analysis[J]. IEEE Signal Processing Magazine,2015,32(2):145-163.

[21] RENSEN M,LATHAUWER L D. Blind signal separation via tensor decomposition with vandermonde factor:canonical polyadic

decomposition[J]. IEEE Transactions on Signal Processing，2013，61(22)：5507–5519.

[22] LIM L H，COMON P. Multiarray signal processing：tensor decomposition meets compressed sensing [J]. Comptes Rendus Mecanique，2010，338(6)：311–320.

[23] ZHAO Y，WANG J，YANG L，et al. Multi–channel audio signal retrieval based on multi–factor data mining with tensor decom position[J]//International Conference on Disital Signal Processing. IEEE. 2014：759–762.

[24] ZHAO Y，WANG J，YANG L，et al. Multi–channel audio signal retrieval based on multi–factor data mining with tensor decomposition[C]//International Conference on Digital Signal Processing，2014：759–762.

[25] BECKER H，KARFOUL A，ALBERA L，et al. Tensor decomposition exploiting structural constraints for brain source imaging[C]// IEEE，International Workshop on Computational Advances in Multi–Sensor Adaptive Processing. IEEE，2015：181–184.

[26] LIN Z，LIU R，SU Z. Linearized alternating direction method with adaptive penalty for low–rank representation[J]. Advances in Neural Information Processing Systems，2011：612–620.

[27] BELHUMEUR P N，HESPANHA J，O P，et al. Eigenfaces vs. fisherfaces：recognition using class specific linear projection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence，1997，19(7)：711–720.

[28] ZHAO W，CHELLAPPA R，PHILLIPS P J，et al. Face recognition：A literature survey[J]. Acm Computing Surveys，2003，35(4)：399–458.

[29] HE G，TANG Y，FANG B，et al. Weightiness image partition in 3D face recognition[C]// IEEE International Conference on Systems，Man and Cybernetics. IEEE，2009：5068–5071.

[30] ZHANG T，TANG Y Y，FANG B，et al. Face recognition under varying illumination using gradientfaces[J]. IEEE Transactions on Image Processing A Publication of the IEEE Signal Processing Society，2009，18(11)：2599–2606.

[31] YAN S，XU D，YANG Q，et al. Multilinear discriminant analysis for face recognition[J]. Image Processing IEEE Transactions on，2007，16(1)：212–20.

[32] WELLING M，WEBER M. Positive tensor factorization[J]. Pattern Recognition Letters，2001，22(12)：1255–1261.

[33] KIM Y D，CHOI S. Nonnegative Tucker Decomposition[C]//IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. DBLP，2007：1–8.

[34] HAZAN T，POLAK S，Shashua A. Sparse Image Coding Using a 3D Non–Negative Tensor Factorization[C]//Tenth IEEE International Conference on Computer Vision. IEEE Computer Society，2005：50–57.

[35] CHEN D，PLEMMONS R J. Nonnegativity constraints in numerical analysis[M]//The Birth Of Numerical Analysis. 2015：109–139.

[36] LATHAUWER L D. Signal Processing Based on Multilinear Algebra[M]. Katho Lieke Universiteit Leuven，1997.

[37] NION D，SIDIROPOULOS N D. Tensor algebra and multidimensional harmonic retrieval in signal processing for MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Signal Processing，2010，58(11)：5693–5705.

[38] ROEMER F，HAARDT M，DEL GALDO G. Higher order SVD based subspace estimation to improve multi–dimensional parameter estimation algorithms[C]//Signals，Systems and Computers，2006. ACSSC ′06. Fortieth Asilomar Conference on. IEEE，2006：961–965.

[39] BOYER R，DE LATHAUWER L，ABED–MERAIM K. Higher order tensor–based method for delayed exponential fitting[M]. IEEE Press，2007.

[40] 张瑞杰，李弼程，张连海，等. 基于 VQ–GMM 的音频分类[J]. 信息工程大学学报，2008，9(4)：423–426.

[41] BENETOS E，KOTROPOULOS C，LIDY T，et al. Testing supervised classifiers based on non–negative matrix factorization to musical instrument classification[C]//Signal Processing Conference，2006，European. IEEE，2006：1–5.

[42] NION D，SIDIROPOULOS N D. Tensor Algebra and Multidimensional Harmonic Retrieval in Signal Processing for MIMO Radar [J]. IEEE Transactions on Signal Processing，2010，58(11)：5693–5705.

[43] ANDERSEN A H，RAYENS W S. Structure–seeking multilinear methods for the analysis of fMRI data[J]. 2004，22(2)：728–739.

[44] MARTíNEZ–MONTES E，SANCHEZ–BORNOT J M，VALDéS–SOSA P A. Penalized PARAFAC analysis of spontaneous EEG recordings[J]. Statistica Sinica，2008，18(4)：1449–1464.

[45] ZHANG Z K，LIU C. Hypergraph model of social tagging networks[J]. Journal of Statistical Mechanics，2010，2010(10)：181–181.

[46] GONG CHENG，LEI GUO，TIANYUN ZHAO，et al. Automatic landslide detection from remote–sensing imagery using a scene classification method based on BoVW and pLSA[J]. International Journal of Remote Sensing，2013，34(1)：45–59.

[47] SINGH A, PARMANAND, SAURABH. Survey on pLSA based scene classification techniques[C]// Confluence the Next Generation Information Technology Summit. IEEE, 2014: 555–560.
[48] COHN D, HOFMANN T. The missing link: a probabilistic model of document content and hypertext connectivity[C]//International Conference on Neural Information Processing Systems. MIT Press, 2000: 409–415.
[49] MIKA P. Ontologies are us: A unified model of social networks and semantics[M]. Elsevier Science Publishers B. V. 2007.
[50] SYMEONIDIS P, NANOPOULOS A, MANOLOPOULOS Y. Tag recommendations based on tensor dimensionality reduction[C]//In RecSys ´08: Proceedings of the 2008 ACM conference on Recommender systems, ACM, 2008: 43–50.
[51] RENDLE S, MARINHO B, NANOPOULOS A, Thieme L (2009) Learning optimal ranking with tensor factorization for tag recommendation[C]//In: KDD '09: proceedings of the 15th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining: 727–736.
[52] RENDLE S, SCHMIDT–THIEME L. Pairwise interaction tensor factorization for personalized tag recommendation[C]//Proc. third ACM Int. Conf. Web search data Min. (WSDM ´10), 2010: 81–90.
[53] 廖志芳,李玲,刘丽敏,等. 三部图张量分解标签推荐算法[J]. 计算机学报,2012,35(12):2625–2632.
[54] DUARTE M F, ELDAR Y C. Structured compressed sensing: from theory to applications[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(9): 4053–4085.
[55] LIU G, LIN Z, YAN S, et al. Robust recovery of subspace structures by low–rank representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2010, 35(1): 171.
[56] ZHANG Q, LI B. Discriminative K–SVD for dictionary learning in face recognition[C]//Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE, 2010: 2691–2698.
[57] XIAO S, TAN M, DONG X, et al. Robust kernel low–rank representation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2016, 27(11): 2268–2281.
[58] LIU Y, WU D, LIU L, et al. Graph–based non–negative tensor factorization for image classification[J]. Journal of Computational Information Systems, 2014, 10(1): 267–274.
[59] 赵学智,聂振国,叶邦彦,等. 信号有效奇异值的数量规律及其在特征提取中的应用[J]. 振动工程学报,2016,29(3):532–541.

Research and Application of Tensor Decomposition Algorithm

Xiong Liyan[1], He Xiong[1], Huang Xiaohui[1], Huang Weichun[2]

(1. School of Information Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;
2. School of Software, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Tensor decomposition is a significant method to deal with large–scale data, which can reduce the data effectively. The high–order tensor is widely used in neuroscience, signal processing, image analysis, computer vision and other fields as it has such advantages as uniqueness, robustness to noises and zero impact on the original data of the spatial structure and internal potential information. In this paper, the traditional dimensionality reduction methods were introduced firstly, and their problems and shortcomings were also discussed. Secondly, general analysis of three classical algorithms of tensor decomposition was carried out from the aspects of algorithm, basic ideas, algorithm framework and algorithm applications of CP decomposition, Tucker decomposition and non–negative tensor decomposition. Then, The CP decomposition algorithm and the Tucker decomposition algorithm were compared and analyzed from different angles. Finally, the present situation, practical application and future research trends of tensor decomposition were summarized and analyzed.

Key words: tensor; CP decomposition; tucker decomposition; non–negative tensor decomposition