

文章编号:1005-0523(2019)05-0022-11

# 任意形状 Mindlin 板的弯曲自振特性分析

郭文杰

(华东交通大学铁路环境振动与噪声教育部工程研究中心,江西 南昌 330013)

**摘要:**将改进的 Rayleigh-Ritz 法拓展到对任意形状中厚板的弯曲自振特性分析中。将位移试函数的函数域拓展到曲边域外的矩形区域,并选用改进的傅里叶级数作为试函数。采用刚度可调的弹簧模型模拟复杂边界条件,并引入数值方法将边界离散,对微段的弹性势能求和得到整体边界的弹性势能,解决了任意形状带来的曲边的复杂边界条件的问题。基于能量变分原理和 Mindlin 理论建立求解方程。通过将直边板和曲边板的算例与文献及有限元结果对比,证明本方法的准确性,为实际工程问题提供参考。

**关键词:**改进的 Rayleigh-Ritz 法;任意形状;复杂边界条件;能量法;Mindlin 中厚板理论

**中图分类号:**U336.2

**文献标志码:**A

板壳结构<sup>[1]</sup>广泛应用于各种工程领域,如土木、船舶、航空航天等,目前世界科学技术的发展涉及到一系列高压、高速、高温以及特殊性能材料问题,使得中厚板理论日益引起注意与重视。而且,逐渐得到广泛应用的具有特殊性能的夹层结构及复合材料构件等均是以厚壁结构理论作为分析基础,所以对中厚板振动问题的研究十分必要。实际工程中中厚板的形状、边界条件较为复杂,对任意形状、复杂边界条件下中厚板的自由振动特性的研究具有重要意义。

中厚板理论较多,最常用的是 Mindlin 理论,即一次剪切变形理论。李清禄等<sup>[2]</sup>基于 Mindlin 理论应用打靶法求得非线性两点边值问题,对中厚圆板轴对称的自由振动进行计算。李坦等<sup>[3]</sup>基于 Mindlin 板理论提出了一种高阶八节点杂交四边形单元。EugenioRuocco 等<sup>[4]</sup>基于 Mindlin 理论对任意边界条件下中厚板的屈服特性进行分析。Mindlin 板理论在保证精度的同时,减小了中厚板问题的求解难度和计算量。

结合 Mindlin 理论,大量方法用于中厚板相关问题的研究中。钟阳等<sup>[5]</sup>将中厚板自由振动问题导入哈密顿体系,利用辛几何法求解对边简支板的精确解。陈涛等<sup>[6]</sup>基于 Mindlin 理论,采用波控制方法,将板的振动描述为传播波和衰减波的叠加。黄修长等<sup>[7]</sup>将广义协调元推广到中厚板的自由振动计算中。孙建东等<sup>[8]</sup>将无单元法应用到中厚板的模态分析中,推导了无单元法的插值函数,求解了不同边界条件下中厚板的自由振动问题。武兰河<sup>[9]</sup>基于区域叠加原理和微分容积法,发展了微分容积单元法,分析具有不连续几何特征的中厚板的自由振动问题。除此之外还有有限元法、混合型条元法、杂交有限元法等方法。目前,对任意形状问题的求解主要依赖于数值方法,然而数值方法也存在一些劣势,在精度分析中需要依赖使用者的经验,在模型有变动时几乎都需要重新建模,较为费时费力。应用解析方法对非正交形状,复杂边界条件的中厚板振动问题的求解研究还比较少。作为一种从结构内部探究结构振动机理,从理论角度对数值方法的结果进行检验的手段,解析方法的研究仍然具有十分重要的意义。

收稿日期:2019-02-21

作者简介:郭文杰(1992—),男,讲师,博士,研究方向为结构噪声与振动控制。

本文将改进的 Rayleigh-Ritz 法<sup>[10]</sup>拓展到计算任意形状中厚板的振动问题中。对中厚板的位移试函数的函数域拓展为包含结构域的矩形区域,选取改进的傅里叶级数作为试函数,以真实结构域为积分域求取结构的应变能和动能;为了解决任意形状带来的曲边界条件问题,施加均匀分布的刚度系数可调的位移线弹簧和转角线弹簧于边界处,模拟复杂的边界条件,将边界条件对结构振动的影响转化为边界增加的弹性势能对刚度的影响。结合直边和曲边中厚板的算例验证了本文方法在计算中厚板自由振动问题的收敛性和准确性,为工程问题中厚板的振动问题提供参考。

## 1 理论模型的建立

本文的研究模型如图 1 所示,为任意形状的 Mindlin 板,沿板边界存在均匀分布的横向位移线弹簧、旋转线弹簧和扭转线弹簧 3 种类型的弹簧,通过改变刚度系数模拟复杂边界条件。

本文应用的方法是对 Rayleigh-Ritz 法的一种改进,其分析过程与 Rayleigh-Ritz 法的过程基本相同,假设 Mindlin 板的位移试函数的形式为

$$\left. \begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \varphi_m(x) \psi_n(y) e^{i\omega t} \\ \beta_x(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} \varphi_m(x) \psi_n(y) e^{i\omega t} \\ \beta_y(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \varphi_m(x) \psi_n(y) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} (1)$$

式中: $w(x, y)$ 为垂向位移; $\beta_x(x, y)$ 为板中面法线沿  $xz$  平面的平均转角; $\beta_y(x, y)$ 为板中面沿  $yz$  平面的转角; $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}$ 为未知系数向量; $e^{i\omega t}$ 为简谐时间因子; $\varphi_m(x), \psi_n(y)$ 分别为与  $x, y$  方向的正交函数; $M, N$ 为截断项数; $m=1, 2, 3, \dots, M$ ; $n=1, 2, 3, \dots, N$ 。

则 Mindlin 板的应变能为

$$V_p = \frac{1}{2} D \iint_S \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)^2 - 2(1-\mu) \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{1}{2}(1-\mu) \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)^2 \right] ds + \frac{1}{2} k_0 G h \iint_S \left[ \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] ds \quad (2)$$

式中: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 为弯曲刚度; $E$ 为板的杨氏模量; $\mu$ 为泊松比; $S$ 表示板面区域; $k_0 = \frac{6}{5}$ 为剪切系数;

$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ 为剪切刚度; $h$ 为板厚。

板结构的动能表示为

$$T = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \iint_S \left[ w^2 + \frac{1}{12} h^2 (\beta_x^2 + \beta_y^2) \right] ds \quad (3)$$

式中: $\rho$ 为质量密度; $\omega$ 为圆频率。

应用弹簧模型模拟复杂边界条件,将板结构的边界条件对结构振动的影响转化为边界处增加的弹性势能,则 Mindlin 板的边界处增加的弹性势能为

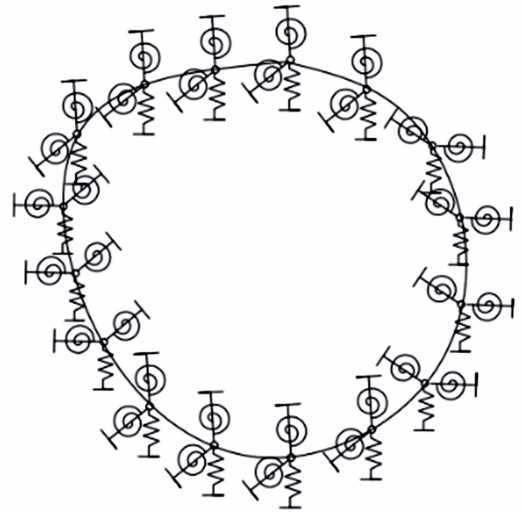


图 1 中厚板模型示意图

Fig.1 Schematic diagram of Mindlin plate model

$$V_s = \frac{1}{2} \int_l [k_l \omega^2 + K_{xl} \beta_x^2 + K_{yl} \beta_y^2] dl \quad (4)$$

式中： $l$ 为边界长度； $k_l, K_{xl}, K_{yl}$ 分别为垂向位移约束线弹簧，绕  $xz$  平面转角的约束线弹簧和绕  $yz$  平面的转角约束线弹簧。

系统的能量泛函可以表示为

$$\Pi = V_p + V_s - T \quad (5)$$

将式(2)~式(4)代入式(5)，并对未知的系数求极值

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial B_{mn}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C_{mn}} = 0 \quad (6)$$

于是将振动问题转化为求极值的问题

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0 \quad (7)$$

式中： $\mathbf{K}$ 是刚度矩阵， $\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_p$ ，其中  $\mathbf{K}_s$ 为弹簧能量的刚度矩阵， $\mathbf{K}_p$ 为整体结构应变能的刚度矩阵； $\mathbf{M}$ 为结构的质量矩阵； $\mathbf{X}$ 为未知的系数向量； $\omega$ 为圆频率。

## 2 改进的 Rayleigh-Ritz 法简介

### 2.1 任意形状问题的处理

传统的 Rayleigh-Ritz 法在计算时，需要根据求解域的形状选择一个合适的试函数，对于形状较为复杂的结构不容易假设其位移试函数。本文方法将任意曲面形状试函数的函数域拓展至曲面域外的矩形区域，试函数很容易得到。再对原结构域进行积分得到结构的应变能与动能，结果误差非常小。

由于改进的傅里叶级数可以使板的试函数在整个求解域内三阶导数连续且四阶导数各点均存在，可以有效克服边界处可能出现的不连续现象，本文方法选用改进的傅里叶级数作为试函数<sup>[1]</sup>，具体形式为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m(x) &= \sin(m\pi x) & 0 < m < 5 \\ \varphi_m(x) &= \cos[(m-5)\pi x] & m \geq 5 \\ \psi_n(x) &= \sin(n\pi x) & 0 < n < 5 \\ \psi_n(x) &= \cos[(n-5)\pi x] & n \geq 5 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

### 2.2 边界处理

由于改进的傅里叶级数在边界处的值以及其导数值均具有任意性，所以可以采用沿边界线性分布的刚度系数可调的位移线弹簧和转角线弹簧模拟复杂边界条件。计算时将弹性势能计入总能量，通过调节其刚度系数值，得到任意的边界条件。

假设弹簧刚度值分别为  $k_{ij}, K_{xij}$  和  $K_{yij}$ ，经典边界条件的刚度系数取值如表 1。

在实际问题中，有时需要分析弹性边界条件下的振动问题，将弹簧刚度系数直接取相应的值即可。

为解决任意形状带来的曲边的弹性势能的计算问题，本文方法采用数值离散手段，将边界离散成微段，将微段近似当做微小的直线段，计算每个微段的弹性势能，对其求和即得到边界整

表 1 经典边界条件下刚度取值  
Tab.1 Stiffness values under classical boundary conditions

参数	固支	简支	自由
$k_{ij}/(\text{N/m})$	$\infty$	$\infty$	0
$K_{xij}/(\text{N/rad})$	$\infty$	0	0
$K_{yij}/(\text{N/rad})$	$\infty$	0	0

体的弹性势能。边界弹性势能可表示为

$$V_b = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \left[ kw(x_j, y_j)^2 + K \left( \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} \Big|_{x=x_j, y=y_j} \right)^2 \right] \Delta l_j \quad (9)$$

### 3 理论分析

根据 Mindlin 中厚板理论,考虑板的横向剪切变形,忽略垂向应力  $\sigma_z$  和应变  $\varepsilon_z$  的影响,位移假设为

$$\begin{bmatrix} w(x, y, z) \\ u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0(x, z) \\ z\beta_x(x, y) \\ z\beta_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (10)$$

则可得弯曲应变为

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} \quad (11)$$

剪切应变为

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{bmatrix} \quad (12)$$

面内应力可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

根据式(1)与式(8)表示的 Mindlin 板的位移试函数形式,设

$$\mathbf{d}^T = [\mathbf{A}_{nm} \quad \mathbf{B}_{mn} \quad \mathbf{C}_{mn}] \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = [\varphi_1(x)\psi_1(y), \varphi_1(x)\psi_2(y), \dots, \varphi_1(x)\psi_N(y), \dots, \varphi_M(x)\psi_N(y)] \quad (15)$$

将式(1)位移试函数代入式(10)得

$$\begin{bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^T & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda}^T & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\lambda}^T \end{bmatrix} \quad (16)$$

于是可得

$$\begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ z\beta_x \\ z\beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^T & 0 & 0 \\ 0 & z\boldsymbol{\lambda}^T & 0 \\ 0 & 0 & z\boldsymbol{\lambda}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d} \quad (17)$$

$$\text{其中: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^T & 0 & 0 \\ 0 & z\boldsymbol{\lambda}^T & 0 \\ 0 & 0 & z\boldsymbol{\lambda}^T \end{bmatrix}.$$

Mindlin 板的应变可以表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial y} & \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} & \lambda & 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{d} \quad (18)$$

$$\text{式中: } \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial x} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial y} & \lambda & 0 \\ 0 & \frac{\partial \lambda}{\partial y} & \frac{\partial \lambda}{\partial x} & 0 & \lambda \end{pmatrix}。$$

于是 Mindlin 板的弯曲应变能表示为

$$V_p = \frac{1}{2} \int \int_s \boldsymbol{B}^T \begin{bmatrix} G_b & 0 \\ 0 & G_s \end{bmatrix} \boldsymbol{B} dx dy \quad (19)$$

$$\text{式中: 弯曲刚度 } G_b = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix}; \text{ 剪切模量 } G_s = k_0 h G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

Mindlin 板的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int \int_s \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{m}_0 \boldsymbol{P} dx dy \quad (20)$$

$$\text{式中: } \boldsymbol{m}_0 = \rho \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{pmatrix}。$$

Mindlin 板的边界处弹簧弹性势能为

$$V_s = \frac{1}{2} \int_l \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{K}_s \boldsymbol{\lambda} dl \quad (21)$$

$$\text{式中: } \boldsymbol{K}_s = \begin{pmatrix} k_l & 0 & 0 \\ 0 & K_{xl} & 0 \\ 0 & 0 & K_{yl} \end{pmatrix}。$$

将式(19),式(20)和式(21)代入式(6)和式(7),将振动问题转化为求特征值的问题,求解式(7)可以得到 Mindlin 板的固有频率。

#### 4 数值计算

本文对复杂边界条件下任意形状 Mindlin 板的自振特性进行分析,并与文献及有限元软件进行比对,证明本方法在计算中厚板自由振动问题的收敛性和准确性,以下算例的材料参数均为:杨氏模量  $E=2.1 \times 10^{11}$  Pa,泊松比  $\mu=0.3$ ,密度  $\rho=7850$  kg/m<sup>3</sup>。

#### 4.1 收敛性分析

试函数中的截断项数  $M, N$  的取值和弹簧刚度取无穷时的实际计算值对结果的精度有很大的影响,本次收敛性分析针对以上两个量进行。选用矩形 Mindlin 板为模型,基本参数为:长  $a$  为 1 m,宽  $b$  为 1 m,厚度  $h=0.1$  m。表 2 给出四边自由边界下不同截断项数  $M, N$  对应的前 10 阶固有频率。

表 2 四边自由边界下 Mindlin 矩形板的固有频率随截断项的变化

Tab.2 Change of natural frequency of Mindlin rectangular plate with the truncation under the free boundary condition

Hz						
阶数	$M=N=12$	$M=N=13$	$M=N=14$	$M=N=15$	$M=N=16$	FEM
1	316.35	316.35	316.22	316.22	316.14	316.84
2	472.36	472.35	472.35	472.35	472.35	471.89
3	581.44	581.43	581.43	581.42	581.42	581.03
4	794.62	794.35	794.26	794.12	794.07	795.20
5	794.62	794.35	794.26	794.12	794.07	795.20
6	1 380.54	1 380.49	1 380.48	1 380.46	1 380.45	1 378.90
7	1 380.54	1 380.49	1 380.48	1 380.46	1 380.45	1 378.90
8	1 386.31	1 385.38	1 385.35	1 384.84	1 384.83	1 387.80
9	1 510.67	1 510.65	1 510.18	1 510.17	1 509.89	1 510.40
10	1 685.98	1 685.95	1 685.58	1 685.56	1 685.33	1 685.80

表 2 数据表明,随着截断项数  $M, N$  的不断增加, Mindlin 矩形板的弯曲自由振动固有频率趋于定值。当  $M=N=14$  时,本方法已经基本收敛。

在模拟复杂边界条件时,有时需要将弹簧刚度系数取为无穷,但是在数值计算时无法取无穷而需要取一个大值代替。表 3 为  $M, N$  取 14 时,矩形 Mindlin 板固有频率随弹簧刚度系数的变化(取  $K_{x1}=k$  (N/rad),  $K_{y1}=k$  (N/rad),  $k_l=k$  (N/m))。

表 3 四边固支边界下 Mindlin 矩形板固有频率随边界弹簧刚度的变化

Tab.3 Change of nature frequency of Mindlin rectangular plate with the stiffness of the boundary spring

Hz					
阶数	$k/G_b=10^5$	$k/G_b=10^6$	$k/G_b=10^7$	$k/G_b=10^8$	FEM
1	805.83	807.50	807.67	807.69	810.36
2	1 530.72	1 536.55	1 537.15	1 537.20	1 546.2
3	1 530.72	1 536.55	1 537.15	1 537.20	1 546.2
4	2 142.40	2 153.06	2 154.14	2 154.25	2 166.9
5	2 520.93	2 536.50	2 538.07	2 538.22	2 554.2
6	2 545.58	2 560.32	2 561.80	2 561.95	2 578.6
7	3 049.13	3 069.21	3 071.25	3 071.45	3 069.7
8	3 049.13	3 069.21	3 071.25	3 071.45	3 069.7
9	3 697.57	3 729.75	3 732.99	3 733.31	3 088.6
10	3 697.57	3 729.75	3 732.99	3 733.31	3 088.6

表3数据表明,当弹簧的刚度系数不断增大时,矩形 Mindlin 板的固有频率逐渐增大,且趋于定值。当弹簧的刚度系数达到  $k/G_0=10^7$  时结果已经收敛。故可以取上述数值代替计算时弹簧刚度系数为无穷大时的情况。

## 4.2 准确性分析

为验证本文方法的准确性,本节对矩形板,带有斜边的三角形板及带有曲边的椭圆形 Mindlin 板的自振特性进行分析,并作出振型图。本文方法的效率较高,基于 MATLAB 程序,在计算机配置为 4 GHz CPU 与 16 GB RAM 时得到较为精确解的求解时间仅需 50 s 左右。

### 4.2.1 中厚矩形板的弯曲自由振动分析

本节对不同边界条件下的矩形 Mindlin 板进行讨论分析。其模型参数如下:长  $a=1$  m,宽  $b=1$  m,板厚  $h=0.1$  m。选取固支边界计算与文献[12]进行对比,并计算弹性边界条件与有限元结果进行对比。得到表4、表5,误差计算公式为

$$Error = \left| \frac{f_{ref} - f_{Matlab}}{f_{ref}} \right| \times 100\% \quad (22)$$

表4 固支边界条件下中厚矩形板固有频率

Tab.4 Natural frequency of rectangular Mindlin plate under the condition of clamped boundary

阶数	本文/Hz	文献[12]/Hz	Error/%
1	3.293	3.292	0.06
2	6.279	6.276	0.03
3	6.279	6.276	0.03
4	8.800	8.792	0.01
5	10.366	10.356	0.00
6	10.465	10.455	0.00

表5 两对边固支一长边自由一长边弹性条件下矩形板固有频率

Tab.5 Free vibration natural frequency of trilateral elastic boundary triangle plate

$k/(N/m^2)$	频率	1	2	3	4	5	6
$10^6$	本文/Hz	512.32	596.24	957.30	1 305.16	1 412.84	1 703.40
	FEM/Hz	514.33	598.84	960.77	1 315.10	1 423.60	1 707.50
	Error/%	0.39	0.43	0.36	0.76	0.76	0.24
$10^8$	本文/Hz	515.74	604.19	963.21	1 306.83	1 416.19	1 706.68
	FEM/Hz	517.69	606.61	966.54	1 316.70	1 426.80	1 710.80
	Error/%	0.38	0.40	0.34	0.75	0.74	0.24
$10^{10}$	本文/Hz	534.81	769.79	1 323.43	1 332.00	1 555.64	2 015.37
	FEM/Hz	536.97	772.37	1 325.00	1 342.00	1 565.90	2 025.00
	Error/%	0.40	0.33	0.12	0.74	0.66	0.48

文中方法计算得到的矩形 Mindlin 板固有频率与文献结果吻合良好,且适用于对较为复杂的弹性边界条件的计算。

#### 4.2.2 三角形 Mindlin 板的弯曲自由振动分析

为验证本文方法求解复杂边界条件的斜边板振动性能的准确性,对不同边界条件下三角形 Mindlin 板进行计算。模型参数如下:三角形为等腰三角形,其中底边长  $s=2\text{ m}$ ,高  $t=1\text{ m}$ ,厚度  $h=0.1\text{ m}$ 。

本文选取底边简支两腰固支和底边固支两腰自由的组合边界条件为例,验证方法的准确性。并计算三角点处施加弹簧支撑时的固有频率,说明本方法对复杂边界条件的适用性,得到表 6,表 7。

表 6 一直角边自由,一直角边简支,斜边固支边界条件下三角形中厚板固有频率  
Tab.6 Natural frequency of triangular Mindlin plates

阶数	本文/Hz	FEM/Hz	Error/%
1	371.10	372.97	0.50
2	822.69	829.22	0.79
3	1 025.81	1 032.90	0.69
4	1 428.86	1 445.00	1.12
5	1 631.05	1 650.00	1.15
6	1 987.54	1 990.10	0.13
7	2 162.68	2 196.80	1.55
8	2 339.55	2 380.50	1.72
9	2 679.35	2 714.80	1.31
10	2 980.84	3 041.00	1.98

表 7 两斜边简支底边弹性条件下三角形 Mindlin 板固有频率  
Tab.7 Free vibration natural frequency of trilateral elastic boundary triangle plate

$k/(N/m^2)$	频率	1	2	3	4	5	6
$10^6$	Matlab/Hz	345.12	723.27	999.85	1 255.16	1 546.92	1 921.56
	FEM/Hz	346.08	727.10	1 004.00	1 264.50	1 559.50	1 939.20
	Error/%	0.28	0.53	0.41	0.74	0.81	0.91
$10^8$	Matlab/Hz	370.54	738.73	1 007.46	1 264.76	1 553.61	1 927.20
	FEM/Hz	370.94	742.17	1 011.40	1 273.70	1 565.80	1 945.10
	Error/%	0.11	0.46	0.39	0.70	0.78	0.92
$10^{10}$	Matlab/Hz	771.28	1 237.75	1 504.63	1 779.48	2 006.50	2 325.73
	FEM/Hz	772.60	1 242.10	1 506.50	1 787.60	2 013.60	2 334.50
	Error/%	0.17	0.35	0.12	0.45	0.35	0.38

本文方法计算三角形 Mindlin 板在上述边界条件下的固有频率值与有限元仿真(Ansys)计算结果吻合良好,误差均不超过 5%,验证了本文方法在计算复杂边界条件下斜边板的振动问题的适用性。



### 4.2.3 椭圆形中厚板的弯曲自由振动分析

为验证本文方法在求解不同边界条件下曲边板振动性能的适用性,计算不同边界条件下的椭圆形 Mindlin 板的振动特性,主要参数如下:长轴  $a=4$  m,短轴  $b=2$  m,板厚  $h=0.1$  m。

选取简支和固支条件对椭圆板固有频率进行计算,与有限元仿真分析结果对比,得到表 8 和表 9。

表 8 简支边界条件下中厚椭圆形板固有频率

Tab.8 Natural frequency of Mindlin elliptical plate under simply supported boundary conditions

阶数	简支		
	本文/Hz	FEM/Hz	Error/%
1	84.32	82.54	2.16
2	147.62	146.45	0.80
3	239.69	235.98	1.57
4	280.33	285.30	1.74
5	354.44	351.51	0.83
6	376.96	383.23	1.64
7	500.76	492.16	1.75
8	503.99	501.45	0.51
9	597.85	598.66	0.13
10	632.24	640.28	1.26

表 9 固支边界条件下中厚椭圆形板固有频率

Tab.9 Natural frequency of Mindlin elliptical plate under clamped boundary conditions

阶数	固支		
	本文/Hz	FEM/Hz	Error/%
1	167.99	170.22	1.31
2	240.99	243.64	1.09
3	352.16	342.53	2.81
4	424.40	424.57	0.04
5	469.92	466.94	0.64
6	522.19	529.47	1.38
7	653.60	615.80	0.08
8	791.93	654.12	1.37
9	791.93	781.21	0.49
10	915.84	788.06	0.03

表 8、表 9 数据中两种方法的结果吻合良好,误差不超过 3%。图 2 给出了简支边界条件下前四阶模态对应振型图,可以看出本文方法计算所得频率与振型和有限元方法所得结果具有很高的吻合度,从而证明文中方法在计算曲边 Mindlin 板时的精确性。

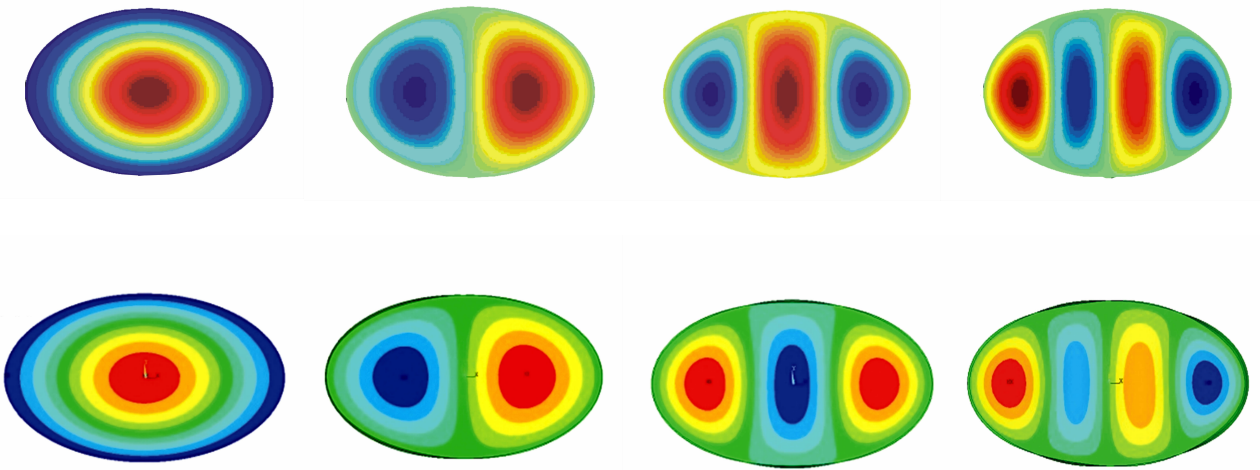


图2 简支边界条件下中厚椭圆形板前四阶振型对比图

Fig.2 Comparison of the first four modes of Mindlin elliptical plate under simply supported boundary conditions

图2表明本文方法分析椭圆形 Mindlin 板的自振特性时,无论从固有频率的计算,还是振型图的绘制,都非常准确。

文中算例充分说明改进的 Rayleigh-Ritz 法在分析任意形状 Mindlin 板的收敛性和适用性,而且适用于各种复杂的边界。

## 5 结论

将改进 Rayleigh-Ritz 法推广应用于对复杂边界条件下任意形状中厚板弯曲自由振动的问题的研究,首先用矩形中厚板进行收敛性分析说明了本方法良好的收敛性;然后以矩形板、三角形板、椭圆形为例计算固有频率,与文献及有限元结果对比,误差较小。最后结合振型图,与有限元软件所得振型图进行对比,直观地看到其振动形态,说明了本方法的准确性。改进的 Rayleigh-Ritz 法可以拓展至计算任意形状中厚板的自由振动问题,得到的频率误差较小。本方法在计算 Mindlin 板的自由振动问题时计算效率比较高,仅需几十秒。而且相比于有限元仿真,本方法在模型参数或边界条件变化时,无重新建模、划分网格等步骤,只需调整参数,省时省力。

## 参考文献:

- [1] 杨菲. 桩板及空心板梁桥结构下穿软土区高铁桥梁的数值模拟研究[J]. 华东交通大学学报, 2017, 34(5): 12-20.
- [2] 李清禄, 张靖华, 李世荣. FGM 中厚圆板轴对称自由振动的打靶法求解[J]. 振动与冲击, 2016, 35(18): 95-100.
- [3] 李坦, 齐朝晖, 马旭, 等. Mindlin 板弯曲和振动分析的高阶杂交应力四边形单元[J]. 大连理工大学学报, 2014, 54(5): 491-498.
- [4] RUOCCO E, MALLARDO V, MINUTOLO V, et al. Analytical solution for buckling of Mindlin plates subjected to arbitrary boundary conditions[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 50: 497-508.
- [5] 钟阳, 李锐, 田斌. 矩形中厚板自由振动问题的哈密顿体系与辛几何解法[J]. 动力学与控制学报, 2009, 7(4): 302-307.
- [6] 陈涛, 胡超, 黄文虎. 基于 Mindlin 板理论对悬臂板结构实施振动控制[J]. 振动与冲击, 2008(5): 8-11.
- [7] 黄修长, 钱振华, 李俊, 等. 应用基于解析试函数的广义协调四边形厚板元分析中厚板的自由振动[J]. 工程力学, 2011, 28(9): 39-43.
- [8] 孙建东, 张伟星, 童乐为. 无单元法在中厚板模态分析中的应用[J]. 土木工程学报, 2006(10): 29-33.
- [9] 武兰河. 求解不连续中厚板自由振动的微分容积单元法[J]. 计算力学学报, 2004(1): 121-128.
- [10] 张俊, 李天匀, 朱翔, 等. 基于改进 Rayleigh-Ritz 法的复杂形状平面薄板自振特性分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(19): 45-51.
- [11] 王青山, 史冬岩, 罗祥程. 任意边界条件下矩形板的内自由振动特性[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2015, 43(6): 127-134.
- [12] LIEW K M, HUNG K C, LIM M K. Vibration of Mindlin plates using boundary characteristic orthogonal polynomials[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 182(1): 77-90.

# Free Vibration Analysis of Mindlin Plates with Arbitrary Shapes

Guo Wenjie

(Engineering Research Center for Railway Environmental Vibration and Noise of the Ministry of Education,  
East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** The improved Rayleigh–Ritz method was extended to the analysis of bending vibration characteristics of Mindlin plates in arbitrary shapes. The domain of displacement test function was extended to the rectangular region outside the curve region, and the improved Fourier series was selected as the test function. The complex boundary conditions were simulated by adopting the linear springs whose stiffness is adjustable. The numerical method was introduced to disperse the boundary edges and by summing up the elastic potential energy of each micro section the elastic potential energy of the whole boundary was obtained. Then, the problems of complex boundary conditions of curved edges brought by arbitrary shape problems can be solved. The equation was established based on the energy variation principle and Mindlin theory. By comparing the results of present method of the straight edge and curved edge plates with the results of the reference and the finite element results, the accuracy of this method is proved, which provides reference for the practical engineering problems.

**Key words:** improved Rayleigh–Ritz method; arbitrary shapes; complex boundary conditions; energy variation method; Mindlin theory