

文章编号: 1005-0523(2021)05-0040-08



## 边坡下限求解的突变分析方法

丁心香<sup>1</sup>, 李 帅<sup>1,2</sup>

(1. 河南省交通规划设计研究院股份有限公司, 河南 郑州 451450;

2. 河南省交通运输行业公路建设与养护技术、材料及装备研发中心, 河南 郑州 451450)

**摘要:**以极限分析下限法为理论基础,利用理想铰接桁架假设构建边坡完整应力场分布,获得相应平衡方程;针对下限解析求解比较困难的问题,基于边坡结构破坏的非线性突变特征,引入突变理论,建立边坡破坏的基本突变模型,通过对突变模型特性及边坡破坏机理进行分析,获得边坡极限荷载下限解。针对已有边坡算例,将所述方法得到的下限解与经典塑性力学解及有限元解比较,验证了方法的可行性。研究利用突变分析理论解决了边坡下限分析中的关键难题,其执行思路可为边坡下限求解提供一种可供选择的新路径。

**关键词:**极限分析理论;下限解;边坡极限荷载;突变理论

中图分类号:TU432

文献标志码:A

本文引用格式:丁心香,李帅. 边坡下限求解的突变分析方法[J]. 华东交通大学学报,2021,38(5):40-47.

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.20211026.014

## Catastrophe Analysis Method of Slope Lower Bound Solution

Ding Xinxiang<sup>1</sup>, Li Shuai<sup>1,2</sup>

(1. Henan Provincial Communications Planning and Design Institute Co., Ltd., Zhengzhou 451450, China;

2. Research and Development Center of Transport Industry of Technologies, Materials and Equipments of Highway Construction and Maintenance, Zhengzhou 451450, China)

**Abstract:**Based on the theoretical foundation of lower bound limit analysis method, corresponding equilibrium equation is derived by using complete stress field of slope which has been built based on perfectly pin connected truss assumption. Catastrophe model of slope failure is constructed based on mutation feature of slope failure. System model property and slope failure mechanism are analyzed, and the lower bound solution of slope failure is achieved. Ultimate load of a slope example is analyzed, and comparison between the solution acquired by the proposed method and the classical plastic theory and comparison between the solution acquired by the proposed method and the finite element method are adopted to illustrate the feasibility of the proposed method. The key difficult problem of slope lower limit analysis is solved by using the catastrophe theory. The executive idea of this research may provide a new optional approach to solve lower bound theoretical solution of ultimate bearing capacity of slope.

**Key words:** limit analysis theory; lower bound solution; ultimate load of slope; catastrophe theory

**Citation format:** DING X X, LI S. Catastrophe analysis method of slope lower bound solution[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2021, 38(5): 40-47.

收稿日期: 2021-06-03

边坡的极限荷载或者破坏荷载一直是岩土工程领域研究的重点,目前解决该问题主要有 3 类方法:极限平衡法,有限单元法和极限分析法。综合来说,3 类方法各具优劣,极限平衡法理论简单、发展完善,在实际工程中广泛应用并积累了大量的经验,但其无法考虑土体内部的应力-应变关系,并不总能满足静力平衡条件和土体强度条件<sup>[1-2]</sup>;有限单元法能够在各种土层性质、本构关系、加载情况等条件下表示出土体内部各阶段的力和位移,但由于单元间的“Locking”效应往往造成求得的极限荷载值无法保证边坡安全性,并且其安全程度是无法预估的<sup>[3]</sup>;极限分析方法不受结构几何形状以及外覆荷载条件的制约,只针对结构的最终状态按照一定的破坏规则即可获得一个实用的荷载值,但其需要构建满足要求的应力场或速度场,并同时求解塑性流动方程,利用解析法通常难以实现<sup>[4-6]</sup>。

极限分析法包括上限法和下限法,上限解条件下,边坡可能安全也可能破坏,边坡赋存状态难以准确评定,存在一定安全隐患<sup>[7-8]</sup>;下限解则是一个完全意义上的安全解,下限解条件下边坡结构也处于完全意义上的稳定状态<sup>[9-11]</sup>,下限解更能符合现今工程中偏安全或偏保守的设计理念。研究下限法的解析求解思路,同时消除下限解的解析求解过程相对复杂的弊端,能够获得更有指导意义和更为实用的下限解。

研究表明:边坡的破坏模式是一种由于强度不足而引起的不稳定现象<sup>[12-13]</sup>,具体表现为边坡失稳破坏存在临界点,临界点以前,边坡表现为渐变;一旦超过临界点,边坡状态即突然发生破坏,表现为突变。利用非线性突变理论来描述边坡这种渐变-突变特征,对边坡失稳机制进行分析更接近实际情况<sup>[14-15]</sup>。

研究借助理想铰接桁架假设,基于边坡渐变-突变演化特征,建立极限荷载下限分析突变模型,进而获得边坡极限荷载的一个下限解,解决常规解析法难以求解下限的问题。

### 1 下限分析的应力不间断条件

极限分析下限定理假定土体为理想弹塑性材料,通过放松某些特定约束条件,绕过土体发生变形的弹塑性阶段,而直接通过最终状态寻求塑性极限荷载。下限定理可以描述为<sup>[7]</sup>:如果能在物体内找

到静力平衡应力场  $\sigma_j^s$  与边界上面力  $T_i$  相平衡,且满足屈服条件,则施加的荷载就可以由一个弹性-理想塑性材料来承担,物体在面力  $T_i$  和体力  $F_i$  的共同作用下是稳定的,所有该类状态下的应力场所给出的值都是安全的,满足这些条件的应力场为静力许可应力场,显然,满足静力许可的应力场应能够满足下列条件:

- 1) 一定体积范围内,满足静力平衡条件;
- 2) 一定体积范围内,不违背屈服条件;
- 3) 应力边界上满足应力边界条件。

在进行下限分析时,首先构建满足静力许可的应力场。将土体划分为若干个应力区,则每个应力区内均应该满足平衡条件、屈服条件和应力不间断条件<sup>[4]</sup>,即在间断面上的正应力  $\sigma$  和剪应力  $\tau$  必须是连续的,如图 1 所示。

$$\sigma_n^{(I)} = \sigma_n^{(II)} = \sigma_n; \tau^{(I)} = \tau^{(II)} = \tau \quad (1)$$

这里需要指出的是,上述不间断条件并不严格要求相邻区域两侧的应力状态必须连续。

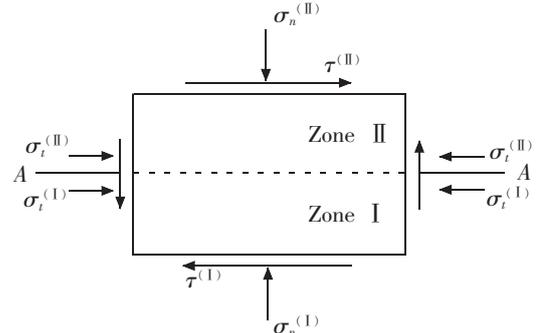


图 1 相邻区域应力不间断

Fig.1 Stress discontinuity between adjacent domains

图 2 为相邻区域的莫尔圆,可以看出,  $P_1, P_2$  分别表示区域 I 和区域 II 莫尔圆的极点,两区域内的应力分量  $\sigma_n$  和  $\tau$  在应力间断线 A 处是相同的,但

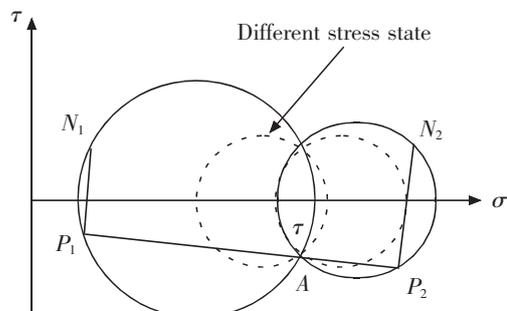


图 2 相邻区域莫尔圆

Fig.2 Mohr circle between adjacent domains

两莫尔圆可以分别表示不同的应力状态,  $\sigma_i$  的值可以不同。

### 2 边坡极限荷载下限分析

由下限定理可以看出,若在屈服点以下存在满足应力平衡状态的应力场,那么外界荷载即可由一个弹性-理性塑性材料构成的结构物来承担,凡是这个应力场下的值都是安全的<sup>[7]</sup>。在对边坡荷载进行下限分析时,假定边坡土体为均质、理想的塑性材料,且服从摩尔-库伦强度准则和流动法则。

将边坡视作承载楔体结构,如图3,假设所有运动均发生在平面内,将边坡极限荷载问题简化为二维平面问题,为方便分析及对比,忽略土体自重。承载楔体左右对称,坡体外覆荷载  $Q$  由理想铰接桁架承担。根据以上条件构建满足静力要求的完整应力场分布,如图4,应力场沿压力轴线左右对称,假定区域 I 和区域 III 处于双向应力状态,区域 II 和区域 IV 分别处于单向应力  $P$  和单向应力  $q'$  的作用,  $\alpha, \beta$  代表的夹角如图4所示。

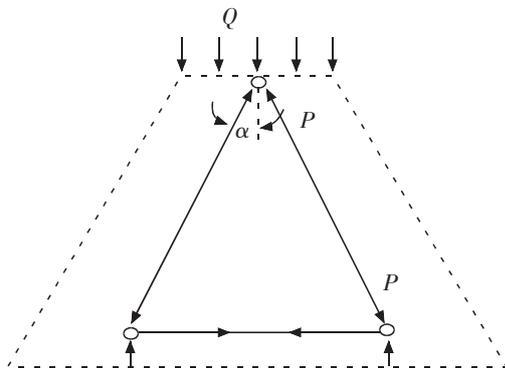


图3 铰接桁架结构图  
Fig.3 Idea map of pin connected truss

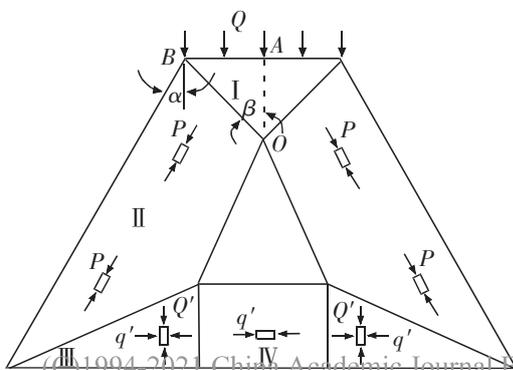


图4 桁架完整应力场  
Fig.4 Field of stress of truss

为方便起见,只对桁架左半部分的应力场进行分析,右侧应力状况与之对称。对三角形微元  $AOB$  所构成的应力场进行分析,如图5所示,作用在三角形微元  $AOB$  上的荷载  $Q$  由作用在微元上应力  $P$  和应力  $q$  平衡,可以进一步推导出:当  $P$  取最大值时,对应的  $Q$  为其中一个最大下界,并且只需要满足 I 区域和 II 区域内的应力状态在屈服点以下,整个系统即为满足要求的应力场分布,所得到的  $Q$  值也就是结构上覆荷载其中的一个下限解。

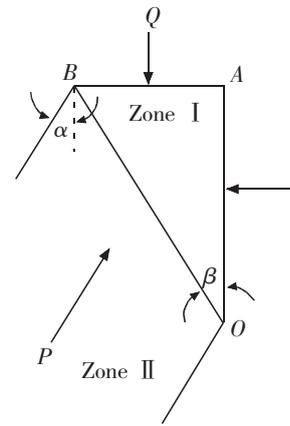


图5 结构微元  $AOB$  的应力场分布  
Fig.5 Field of stress of domain  $AOB$

当应力  $P$  取其最大值时,假定此时 II 区土体抗剪强度达到临界值,结构处于临界破坏阶段,根据摩尔-库伦强度准则可得

$$P = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = 2c \tan \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi \right) \quad (2)$$

式中:  $c, \varphi$  分别为土体黏聚力和内摩擦角。

考虑到所做论述均在平面范围内,令  $L_{AB}=1$ ,则根据三角形角边对应关系:  $L_{AB}/\sin \beta = L_{BO}/\sin 90^\circ$ ,得  $L_{BO}=1/\sin \beta$ ,则作用在微元  $AOB$  斜边  $BO$  上的力可以表示为:  $P \sin(\alpha + \beta) \times L_{BO} = P \sin(\alpha + \beta) / \sin \beta$ ;同理作用在微元  $AOB$  水平方向的力可以表示为:  $q \times L_{AO} = q \times \cot \beta$ 。

进一步对微元  $AOB$  受力进行分析,如图6,则根据  $AOB$  垂直方向力的平衡条件可得

$$Q = \frac{P \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \cos \alpha \quad (3)$$

微元  $AOB$  水平方向力平衡,则

$$q = \frac{P \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \tan \beta}{\sin \beta} = \frac{QP \sin(\alpha + \beta)}{Q - P \sin^2 \alpha} \quad (4)$$

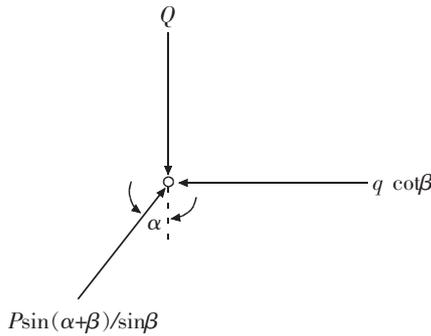


图 6 微元 AOB 受力分析

Fig.6 Load analysis of triangle infinitesimal AOB

结合相邻区域 I 区和 II 区莫尔应力圆 (图 7), 假定临界状态时, 微元 AOB 处于完全意义上的塑性状态, 此时应满足摩尔-库伦屈服准则

$$(q+Q)\sin\varphi+(q-Q)+2c\cos\varphi=0 \quad (5)$$

将式(3)和式(4)代入式(5)可得平衡方程

$$(1-\sin\varphi)Q^2-2P(\cos\varphi\sin\alpha-\sin\varphi+1)Q+P^2\cos^2\alpha(1-\sin\varphi)=0 \quad (6)$$

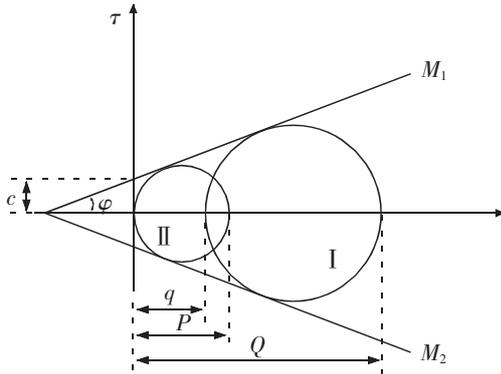


图 7 相邻 I 区域和 II 区域莫尔应力圆

Fig.7 Mohr circles of Domain I and Domain II

### 3 边坡极限荷载分析的突变模型

边坡土体的破坏是一个渐变-突变过程, 具有十分典型的非连续性、不确定性和不可逆性特征<sup>[16-17]</sup>, 其演化路径存在着分叉行为。可利用数学领域的分叉集(集中奇点)来描述边坡失稳的这种行为特征。文章引入突变理论<sup>[13,18]</sup>, 通过研究突变集性质来研究边坡失稳破坏的这种跃迁、不连续和突变的行为特征。

#### 3.1 折迭突变基本模型

折迭突变模型由一个控制变量  $u$  和一个状态变量  $x$  构成, 其势函数  $V(x)$  的表示为

$$V(x)=x^3+ux \quad (7)$$

对式(7)进行求导, 得到势函数临界点方程

$$V'(x)=\frac{\partial V(x)}{\partial x}=3x^2+u=0 \quad (8)$$

系统的平衡曲面由以上势函数的临界点值构成, 其奇点集应该满足条件

$$V''(x)=\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}=6x=0 \quad (9)$$

图 8 为模型的平衡曲面和分枝点集, 函数的相空间为二维, 分枝点集将势函数分为  $u^+$  和  $u^-$  两个区域:  $u>0$  时, 临界点方程无实数根, 相应的势函数无临界点, 表示为系统状态不会发生突变;  $u<0$  时, 临界点方程存在两个实数根, 相应势函数在空间内存在两个临界点<sup>[13]</sup>, 根据折迭突变模型性质, 其在相空间内存在有两个平衡状态, 稳定和不稳定, 也就是说,  $u<0$  时两个实数根也应该对应相空间内的两个平衡状态。

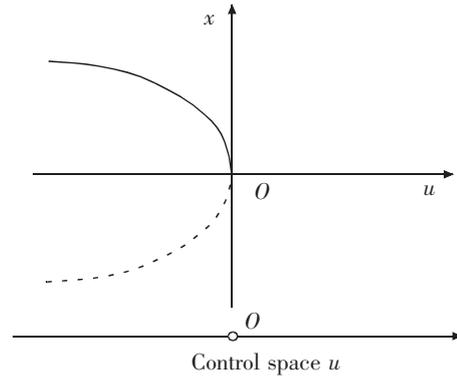


图 8 折迭突变基本模型

Fig.8 Basic model of fold catastrophe

#### 3.2 边坡极限荷载分析的突变模型

式(6)为利用极限分析理论推求出的边坡极限荷载下限的平衡方程, 可以看出: 当荷载  $Q'<$  极限荷载  $Q$  时, 边坡土体处于约束塑流状态, 部分土体发生塑性变形, 但由于周围土体均处于弹性状态, 边坡土体的变形主要为约束塑性变形, 其整体仍然保持稳定;  $Q'=Q$  时, 边坡土体处于约束塑流和塑流破坏间的过渡状态, 该过渡状态存在一个极值点, 在极值点处对  $Q'$  的微小增量都会导致土体由约束塑流状态突变至自由塑流状态, 边坡相应发生突然破坏, 具体表现也就是当  $Q'>Q$  时, 土体会发生无限制的塑性流动而使边坡整体破坏。利用突变模型来表示边坡这一渐变-突变特征, 将突变极限值定位在土体由约束塑流的稳定状态突变至自由塑流的破坏状态。

式(6)可进一步表示为  

$$(1-\sin\varphi)^2Q^2+4c^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha-4c\cos\varphi(1-\sin\varphi+\cos\varphi\sin\alpha)Q=0$$
 (10)

令

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 4c^2\cos^2\varphi\cos^2\alpha \\ a_1 &= -4c\cos\varphi(1-\sin\varphi+\cos\varphi\sin\alpha) \\ a_2 &= (1-\sin\varphi)^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

则式(10)可简化为

$$a_2Q^2+a_1Q+a_0=0 \quad (12)$$

将式(12)变换为折迭突变模型的标准形式

$$3x^2+u=0 \quad (13)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} x &= Q + \frac{a_1}{2a_2} \\ x &= 3\left(\frac{a_0}{a_2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

相应势函数  $V(x)$  的标准形式为

$$V(x)=x^3+ux \quad (15)$$

式中: $x, u$  分别为系统状态变量和控制变量; 参数  $a_0, a_1, a_2$  表示与边坡有关参量。

从图8中可以看出,  $u>0$  时, 系统为空状态, 无实际意义  $u<0$  时, 式(7)所表示的图形为一抛物线,  $u=0$  将该抛物线分为上、下两支, 分别表示系统的稳定平衡状态和不稳定平衡状态。并且当  $u<0$  时, 系统存在有两个平衡状态的定态  $A_1$  和  $A_2$ 。

$$\left. \begin{aligned} A_1 : x_1 &= \sqrt{-\frac{u}{3}} \\ A_2 : x_2 &= \sqrt{-\frac{u}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中: $A_1$  和  $A_2$  分别代表系统的稳定平衡状态和不稳定平衡状态。对于一维连续动力系统, 它的定态对应于其位势在极值条件下的位置, 并且位势值越小, 系统就越稳定, 令

$$\omega = \left. \frac{\partial f^*}{\partial x} \right|_{x_i} = -6x_i \quad (i=1, 2) \quad (17)$$

式中: $w$  为位势值;  $f^*$  为广义应力, 且  $f^* = -\partial V(x)/\partial x$ 。

对于文章所用模型来说, 两个定态  $A_1$  和  $A_2$  对应的位势值  $\omega_1 = -6x_1 < 0, \omega_2 = -6x_2 > 0$ , 定态  $A_1$  为稳定平衡状态, 定态  $A_2$  为不稳定平衡状态。由分枝点集的概念, 势函数相应的分枝点集为:  $u=0$ , 此时两个定态  $A_1$  和  $A_2$  成为一个定态, 即临界定态, 从式(9)势函数的形式可以看出, 该临界定态对应的是平衡曲线的拐点, 也即

$$V''(x) = \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = 6x = 0 \quad (18)$$

此时  $x=0$  为对应的临界分枝点, 可以将  $u=0, x=0$  作为系统状态突变的标志。令

$$\left. \begin{aligned} x &= Q + \frac{a_1}{2a_2} = 0 \\ u &= 3\left(\frac{a_0}{a_2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

则边坡土体对应的极限荷载值可表示为

$$Q = \frac{a_1}{2a_2} = \frac{2c\cos\varphi(1-\sin\varphi+\cos\varphi\sin\alpha)}{(1-\sin\varphi)^2} \quad (20)$$

### 4 算例验证

为验证研究所述方法的可行性, 选取一均质边坡算例<sup>[19-20]</sup>对边坡极限荷载的下限进行分析。

边坡具体形状及几何尺寸如图9所示, 坡比为1:2, 土体主要参数如下: 重度  $\gamma=0 \text{ kN/m}^3$ , 黏聚力  $c=30 \text{ kN/m}^2$ , 内摩擦角  $\varphi=0$ , 边坡坡顶作用有均布荷载  $Q$ , 边坡关于荷载中线左右对称, 针对该算例对边坡的极限荷载进行分析。

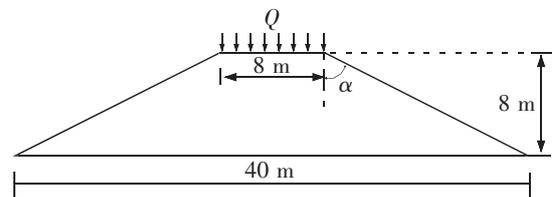


图9 边坡尺寸及几何形状  
 Fig.9 Size and geometric configuration of slope

利用文章所示方法构建的边坡极限荷载折迭突变模型对边坡进行下限求解, 当  $\gamma=0 \text{ kN/m}^3, \varphi=0$  时, 得到结果:  $Q=2c(1+\sin\alpha)=113.66 \text{ kPa}$ 。该解能够保证边坡处于完全意义上的静力稳定状态。张学言<sup>[19]</sup>给出  $\gamma=0 \text{ kN/m}^3, \varphi=0$  情况下经典塑性力学下限分析的理论解析解为

$$Q_F = 2c(1+\sin\alpha) = 113.66 \text{ kPa} \quad (21)$$

可以看出, 在不计重度且内摩擦角为零的情况下, 研究方法计算结果与塑性力学解析解的结果是完全一致的。

当  $\gamma=0 \text{ kN/m}^3, \varphi \neq 0$  时, 张学言<sup>[19]</sup>给出的塑性力学下限分析的解析解表达式为

$$Q_F = c \cot\varphi \left[ \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi\right) \frac{\sin 2v}{\sin 2\delta} - 1 \right] \quad (22)$$

式中: $v, \delta$  分别表示应力间断线与坡顶及坡面的夹

角,其余符号意义同前。将不同  $\varphi$  值下所述方法结果与塑性力学解析解汇总于图 10。

从图 10 可以看出,当  $\gamma=0$  时,边坡极限荷载  $Q$  随着黏聚力的增加而增加,两者表现为线性关系;进一步的,内摩擦角  $\varphi$  值越大,极限荷载  $Q$  随黏聚力  $c$  变化的速率也就越快。

内摩擦角  $\varphi=0$  时研究得到的下限解与塑性力学得到的解析解是完全一致的,而当内摩擦角  $\varphi$  值

越大时,研究所述方法得到的解与塑性力学解析解间误差越大,但在常规岩土力学参数范围内,其误差能控制在 25%以内。

为进一步对比分析,利用研究所述方法、经典塑性力学<sup>[19]</sup>和有限元极限分析<sup>[20]</sup>计算极限荷载  $P$  随内摩擦角  $\varphi$  的变化,如图 11。

从图 11 可以看出,  $\varphi \leq 40^\circ$  时,上述 3 种方法得到的计算结果基本一致,并且该范围内 3 种方法极

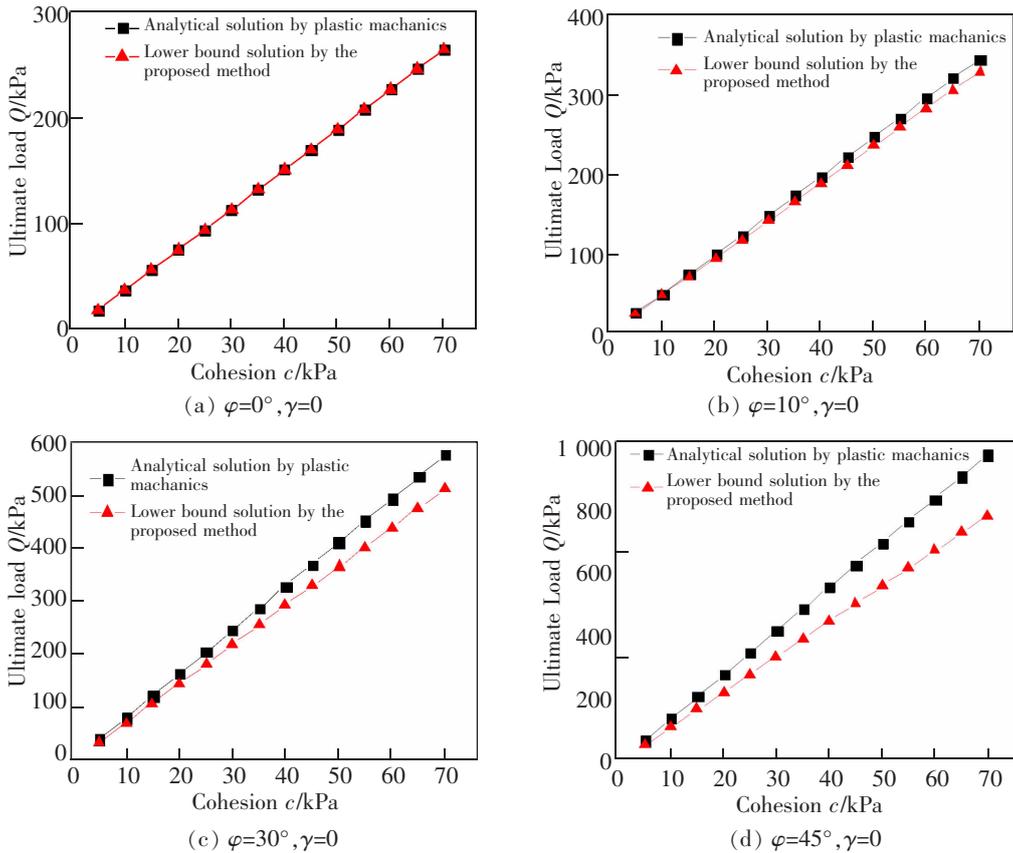


图 10 极限荷载与黏聚力间变化关系

Fig.10 Values of ultimate load with the changes of cohesion

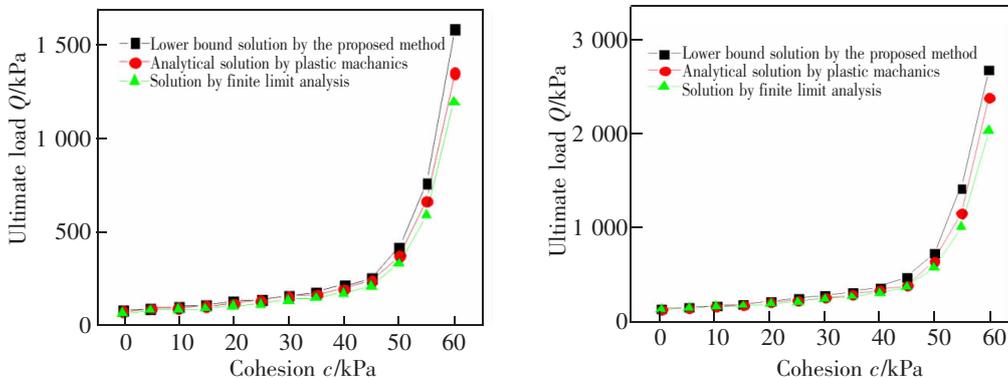


图 11 极限荷载与内摩擦角间变化关系

Fig.11 Values of ultimate load with the changes of internal friction angle

限荷载值随内摩擦角的增大均基本呈线性增大趋势; $\varphi > 40^\circ$ 时,3种方法的极限荷载值随内摩擦角值的增大均呈急剧增大趋势,上述3种方法得到的计算结果间差别也逐渐增大,但计算结果的差别基本上在合理范围内。

上述算例验证了研究所述方法在边坡极限分析中的可行性。与经典塑性力学解析法和有限元极限分析法相比,研究所述方法计算结果与它们基本保持一致,而其计算过程则更为简便、直观,较好解决了边坡极限分析难以解析求解的难题,并充分体现出了边坡失稳破坏的突变特征,是解决边坡极限分析问题的一种新思路。

## 5 结论

研究引入非线性分析突变理论,解决了边坡下限难以解析求解的难题:

1) 基于理想铰接桁架假设构建满足要求的应力场,进而推导出边坡极限荷载下限求解公式。

2) 基于边坡失稳破坏的突变特征,以土体发生完全塑性变形作为边坡失稳破坏的依据,通过对模型性质及边坡失稳破坏机理进行分析,获得边坡极限荷载的一个下限解。

## 参考文献:

- [1] 陈祖煜. 土质边坡稳定性分析[M]. 北京:中国水利水电出版社,2003.  
CHEN Z Y. Soil slope stability analysis[M]. Beijing: China Water & Power Press,2003.
- [2] 雷卫佳,刘伟煌,郭生根,等. 水位升降对库坡渗流场及稳定性影响[J]. 华东交通大学学报,2020,37(4):27-32.  
LEI W J,LIU W H,GUO S G,et al. Analysis of influence of water level rise and fall on seepage field and stability of reservoir slope[J]. Journal of East China Jiaotong University,2020,37(4):27-32.
- [3] 李亮,刘宝琛. 边坡极限承载力的下限分析及可靠性理论[J]. 岩石力学与工程学报,2001,20(4):508-513.  
LI L,LIU B C. Lower bound limit analysis of bearing capacity of slope and its reliability[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2001,20(4):508-513.
- [4] 郑颖人,孔亮. 广塑性力学及应用[J]. 中国工程科学,2005,7(11):21-37.  
ZHENG Y R,KONG L. Generalized plastic mechanics and its application[J]. Engineering Science,2005,7(11):21-37.
- [5] 赵炼恒,罗强,李亮,等. 层状岩体边坡动态稳定性拟静力上限分析[J]. 岩土力学,2010,31(11):3627-3634.  
ZHAO L H,LUO Q,LI L,et al. Upper bound quasi-static analysis of dynamic stability of layered rock slopes[J]. Rock and Soil Mechanics,2010,31(11):3627-3634.
- [6] REN Q W,XU L Y,WAN Y H. Research advance of safety analysis methods for high concrete dam [J]. Science in China(Series E: Technological Sciences),2007,50(S1):62-78.
- [7] 陈惠发,詹世斌. 极限分析与土体塑性[M]. 北京:人民交通出版,1995.  
CHEN H F,ZHAN S B. Limit analysis and soil plasticity [M]. Beijing:China Communications Press,1995.
- [8] 张道兵,潘秋景,杨小礼,等. 用极限分析方法计算边坡可靠度上限值[J]. 重庆大学学报,2014,37(7):59-65.  
ZHANG D B,PAN Q J,YANG X L,et al. Upper bound solution of reliability for slope based on limit analysis method [J]. Journal of Chongqing University,2014,37(7):59-65.
- [9] 李亮,杨小礼. 圆形浅基础地基承载力极限分析的上限解析解[J]. 铁道学报,2001,23(1):94-97.  
LI L,YANG X L. Analytical solution of bearing capacity of circular shallow foundations using upper-bound theorem of limit analysis[J]. Journal of the China Railway Society,2001,23(1):94-97.
- [10] 杨小礼. 线性与非线性破坏准则下岩土极限分析方法及其应用[D]. 长沙:中南大学,2002.  
YANG X L. Limit analysis method and its application to geotechnical engineering with linear and nonlinear failure criteria[D]. Changsha:Central South University,2002.
- [11] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土工程学报,2002,24(1):1-11.  
CHEN Z Y. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2002,24(1):1-11.
- [12] 郑明新. 新型抗滑结构研究现状与发展趋势[J]. 华东交通大学学报,2019,36(5):1-9.  
ZHENG M X. Research status and development trend of new Anti-slide pile structure[J]. Journal of East China Jiaotong University,2019,36(5):1-9.
- [13] 凌复华. 突变理论及其应用[M]. 上海:上海交通大学出版社,1987.  
LING F H. Mutation theory and its application[M]. Shanghai:Shanghai Jiao Tong University Press,1987.
- [14] ZHU H W,YAO L K,LOU Y. Seismic stability evaluation of embankment slope based on catastrophe theory[J]. Journal of Modern Transportation,2013,21(2):111-116.

- [15] 付成华, 陈胜宏. 基于突变理论的地下工程洞室围岩失稳判据研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(1): 167-173.  
FU C H, CHEN S H. Study on instability criteria of surrounding rock of underground engineering cavern based on catastrophe theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(1): 167-173.
- [16] 李志平, 彭振斌, 何忠明, 等. 一种基于塑性功和突变理论的边坡临界状态确定方法[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2016, 47(9): 3193-3200.  
LI Z P, PENG Z B, HE Z M, et al. An approach for determination of slope failure criterion based on plastic energy and mutation theory[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2016, 47(9): 3193-3200.
- [17] 夏开宗, 刘秀敏, 陈从新, 等. 考虑突变理论的顺层岩质边坡失稳研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(2): 477-486.  
XIA K Z, LIU X M, CHEN C X, et al. Analysis of mechanism of bedding rock slope instability with catastrophe theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(2): 477-486.
- [18] 刘军, 秦四清, 张俤元. 缓倾角层状岩体失稳的尖点突变模型研究[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(1): 42-44.  
LIU J, QIN S Q, ZHANG Z Y. Study on catastrophic model with cusp point for failure of stratified rock mass with a gentle inclination[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(1): 42-44.
- [19] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 1993.  
ZHANG X Y. Rock and soil plastic mechanics[M]. Beijing: China Communications Press, 1993.
- [20] 孙君, 陶杰, 蒋刚. 边坡与地基极限荷载的下限有限元解[J]. 土工基础, 2009, 23(5): 50-54.

SUN J, TAO J, JIANG G. Solution of ultimate load for slope and foundation with finite element lower bound limit analysis method[J]. Soil Engineering and Foundation, 2009, 23(5): 50-54.



第一作者: 丁心香(1981—), 女, 高级工程师, 研究方向为路基路面、土木工程材料等。E-mail: dingding19820608@sina.com。



通信作者: 李帅(1989—), 男, 高级工程师, 博士, 研究方向为边坡及地下结构稳定性等。2018年博士毕业于湖南大学。E-mail: shuai\_li@hnu.edu.cn。

(责任编辑: 姜红贵)