第38卷第5期 华东交通大学学报 Vol.38 No.5
2021年10月 Journal of East China Jiaotong University Oct., 2021

文章编号:1005-0523(2021)05-0119-07

两类交叉四角链的拉普拉斯谱及其应用

涂淑玲,王广富

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要:通过研究线性交叉四角链 X_n 和交叉四角柱状链 G_n 的结构特点,利用合成图的拉普拉斯特征值计算出了 X_n 与 G_n 的拉普拉斯谱,并且导出了 X_n 与 G_n 的基尔霍夫指标,度-基尔霍夫指标和生成树的数目的解析式。且得到当 n 趋于无穷大时,交叉四角柱状链 G_n 的基尔霍夫指标是线性交叉四角链 X_n 的基尔霍夫指标的二分之一。

关键词:拉普拉斯谱;基尔霍夫指标;生成树;线性交叉四角链;交叉四角柱状链

中图分类号:O157.6 **文献标志码**:A

本文引用格式:涂淑玲,王广富. 两类交叉四角链的拉普拉斯谱及其应用[J]. 华东交通大学学报,2021,38(5):119-125.

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.20211026.009

Laplacian Spectrum of Two Classes of Linear Crossed Polyomino Chains and its Applications

Tu Shuling, Wang Guangfu

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: By studying the structural characteristics of linear crossed polyomino chain X_n and crossed polyomino cylinder chain G_n, the Laplacian spectra of X_n and G_n are calculated by the Laplacian eigenvalues of the composite graph, and the analytic expressions of Kirchhoff index, degree-Kirchhoff index and the number of spanning trees of X_n and G_n are derived. And we show that when n tends to be infinity, the Kirchhoff index of crossed polyomino cylinder chain G_n is one-half of the Kirchhoff index of the linear crossed polyomino chain X_n.

Key words: Laplacian spectrum; Kirchhoff index; spanning tree; linear crossed polyomino chain; crossed polyomino cylinder chain

Citation format: TU S L, WANG G F. Laplacian spectrum of two classes of linear crossed polyomino chains and its applications[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2021, 38(5): 119-125.

在图论中,拉普拉斯矩阵是图的一种矩阵表示,定义为图的度矩阵与邻接矩阵的差。拉普拉斯矩阵的所有特征值称为图的拉普拉斯谱。拉普拉斯谱及其应用可以解决复杂网络中的许多理论问题[1-2],网络的拉普拉斯谱的计算在拓扑结构和动力学等方面有诸多应用。例如,在化学上,对于用来反映化合物分子结构的基尔霍夫指标已有广泛的研究。1993年,Klein等[3]提出了一个新的距离函数——电阻距离。图的每条边等价于一个单位电阻,然后利用欧姆定律计算出任意两个顶点之间的有效电阻,即电阻距离;图中所有顶点对之间的电阻距离之和定义为图的基尔霍夫

收稿日期:2021-03-12

基金项目:国家自然科学基金(11861032,11961026);江西省自然科学基金(20202BABL201010)

指标。网络的基尔霍夫指标可以用非零拉普拉斯特征值的倒数之和来表示[4];网络的生成树数目可以由所有非零拉普拉斯特征值的乘积来确定[5];网络的直径可以由拉普拉斯矩阵的第二小特征值来估算[6]。尽管从分析的角度,拉普拉斯谱的计算只是一个理论上的挑战,但建立网络的拉普拉斯谱是很有意义的。近二十年来,有很多人在研究各类分子图的拉普拉斯谱的计算及其应用[3,4,7-11]。Yang 等[12]研究了线性六角链的部分拉普拉斯特征值,从而确定了其基尔霍夫指标。之后,人们通过 Yang 等[12]的方法得到了其他一些分子网络的部分拉普拉斯特征值及基尔霍夫指标,如苯环[13]、五边形链[14]等。Pan 等[15]研究了线性交叉多联骨牌链(即线性交叉四角链)的部分拉普拉斯特征值、基尔霍夫指标及生成树数目。直接计算出某图类的所有的拉普拉斯特征值还是很困难的。本文主要研究并确定了线性交叉四角链和交叉四角柱状链两类图的拉普拉斯谱,更简便地得到了这两类图的基尔霍夫指标及其生成树数目表达式。另外,还利用交叉四角柱状链的拉普拉斯谱,推导出交叉四角柱状链的度-基尔霍夫指标的表达式。

1 预备知识

本文考虑的均为连通无向图,即图中任意两个顶点都存在路径使其连通。设图 $G=(V,E)$,$V=\{1,2,\cdots,n\}$ 和 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 分别为图 G 的顶点集和边集。d_i 表示顶点 i 的度,$i=1,2,\cdots,n$。文中未加说明的符号以及定义等参见文献[16]。

定义 1.1 图的拉普拉斯矩阵是指由顶点集 V 作为行和列进行索引 $n\times n$ 的矩阵,记为 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})=(l_{ij})$,其中

$$l_{ij}=\begin{cases} d_i, & \text{如果 } i=j \\ -1, & \text{如果 } i \text{ 与 } j \text{ 相邻} \\ 0, & \text{如果 } i \text{ 与 } j \text{ 不相邻} \end{cases} \tag{1}$$

定义 1.2 拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$ 的所有特征值称为图 G 的拉普拉斯谱;若 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$ 的特征值为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}>\lambda_n=0$,那么图 G 的拉普拉斯谱可记为 $S(G)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

定义 1.3 设 $H_1=(V_1,E_1)$,$H_2=(V_2,E_2)$ 是两个顶点集不相交的简单图,对顶点集 $V=V_1\times V_2$(即 V_1 与 V_2 的卡氏积)中的任意两个点 $u=(u_i,v_j)$ 和 $v=(u_p,v_q)$,当 u_i 与 u_p 相邻或者 $u_i=u_p$ 且 v_j 与 v_q 相邻时就将 u 和 v 连一条边所得到的图。称之为 H_1 与 H_2 的合成图,记为 $H=H_1[H_2]$。

定义 1.4 图 G 的一个生成子图若是一棵树,称为图 G 的一棵生成树。

定义 1.5 将图 G 看成一个电网络 N 且图 G 的每条边等价于一个单位电阻,然后计算出电网络 N 中任意两个顶点 i 与 j 之间的有效电阻,即顶点 i 与 j 之间的电阻距离,记为 r_{ij}[3]。

定义 1.6 图 G 的基尔霍夫指标定义为图 G 中所有顶点对之间的电阻距离之和,即 $Kf(G)=\sum_{i<j} r_{ij}$[3]。

定义 1.7 图 G 的度-基尔霍夫指标定义为 $Kf^*(G)=\sum_{i<j} d_i d_j r_{ij}$,其中 d_i 与 d_j 是指顶点 i 与 j 的度[17]。

以下列出前人得出的一些结论。

在 1996 年 Klein 等[4],Gutman 等[18]得到了基尔霍夫指标的另一种计算公式,如下所示:

引理 1.8 对于任意一个具有 n 个顶点的连通图 G,其中 $n>2$[4,18],有

$$Kf(G)=n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_i} \tag{2}$$

Hou 等[19]得到了任意两个图的合成图的拉普拉斯特征值和生成树数目的表达式,其中结构相同而标号不同的生成树视为不同的生成树。

引理 1.9 设 $H=H_1[H_2]$,其中 $|V(H_1)|=s$,$|V(H_2)|=t$,若 $S(H_1)=(0,\mu_1,\cdots,\mu_{s-1})$,$S(H_2)=(0,\omega_1,\cdots,\omega_{t-1})$,图 H_1 的度序列记为 $d(H_1)=(d_1,d_2,\cdots,d_s)$,那么 $H=H_1[H_2]$ 的拉普拉斯特征值是 $0,t\mu_i(i=1,\cdots,s-1),td_l+\omega_j(l=1,\cdots,s;j=1,\cdots,t-1)$[19]。

引理 1.10 设 $H=H_1[H_2]$,那么的生成树数目 $\tau(H_1[H_2])$ 的值为[19]

$$t^{s-2}\cdot\tau(H_1)\prod_{l=1}^{s}\prod_{j=1}^{t-1}(td_l+\omega_j) \tag{3}$$

如图 1 所示,设 X_n 是由 n 个完全图 K_4 构成且经过适当标号的一条线性交叉四角链;G_n 是由 n 个完全图 K_4 组成的交叉四角柱状链,其平面展开图如图 2(a)所示,G_6 的立体图如图 2(b)所示。

可以发现:X_n 可看成是一条路与 K_2 的合成图,即 $X_n=P_{n+1}[K_2]$,其中 P_{n+1} 表示一条 $n+1$ 个顶点的路;G_n 是具有 n 个顶点的圈 C_n 与 K_2 的合成图,即 $G_n=C_n[K_2]$。

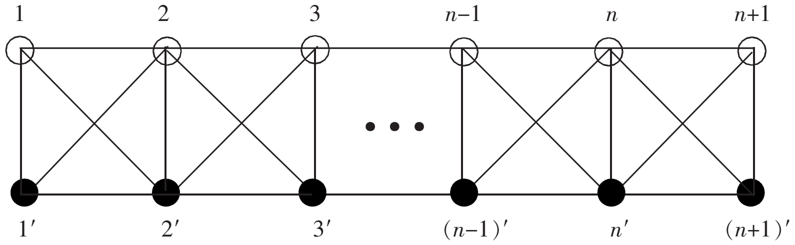
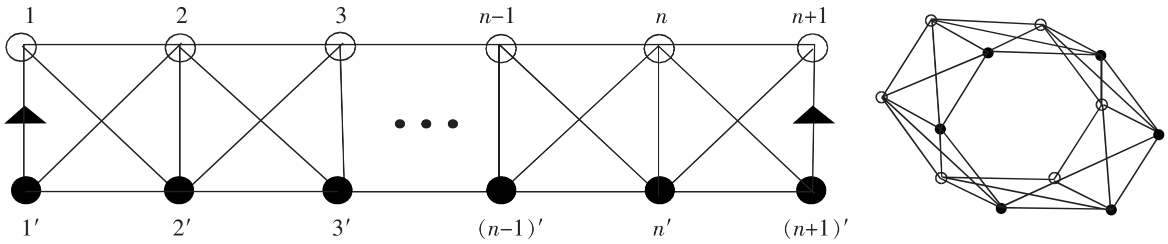


图 1　线性交叉四角链 X_n

Fig.1　Linear crossed polyomino chain X_n



(a) G_n　　(b) G_6

图 2　交叉四角柱状链

Fig.2　Crossed polyomino cylinder chain

2　线性交叉四角链 X_n 的拉普拉斯谱及其应用

在这部分，先计算 X_n 的拉普拉斯谱。

一方面，$|V(P_{n+1})|=n+1$，$|V(K_2)|=2$；$|V(X_n)|=2(n+1)$；

由文献[20]，可知 $S(P_{n+1})=(\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_n)$，其中 $\mu_i=4\sin^2\dfrac{\pi i}{2(n+1)}$，$i=0,1,\cdots,n$；另一方面，$S(K_2)=(0,2)$；$d(P_{n+1})=(\underbrace{1,2,\cdots,2}_{n-1\text{个}},1)$；

利用引理 1.9，可以计算出 X_n 的特征值为：$0,2\mu_i(i=1,2,\cdots,n),2d_l+2(l=1,2,\cdots,n+1)$。

即 X_n 的拉普拉斯谱为：0，

$$S(X_n)=(0,2\mu_1,2\mu_2,\cdots,2\mu_n,4,4,\underbrace{6,\cdots,6}_{n-1\text{个}})\tag{4}$$

式中：$\mu_i=4\sin^2\dfrac{\pi i}{2(n+1)}$，$i=0,1,\cdots,n$。

下面是 X_n 的拉普拉斯谱的两个应用。

2.1　X_n 的基尔霍夫指标

定理 1　设 X_n 为线性交叉四角链，则

$$Kf(X_n)=\frac{(n+1)(n+2)^2}{6}\tag{5}$$

证明：由引理 1.8，有

$$Kf(X_n)=2(n+1)\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\lambda_k}\tag{6}$$

$$=2(n+1)\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\mu_i}+2\times\frac{1}{4}+(n-1)\times\frac{1}{6}\right]\tag{7}$$

$$=(n+1)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i}\right]+(n+1)+\frac{(n+1)(n-1)}{3}\tag{8}$$

$$=Kf(P_{n+1})+(n+1)+\frac{(n+1)(n-1)}{3}\tag{9}$$

又由 $Kf(P_n)=\dfrac{n^3-n}{6}$[21]，可得

$$Kf(X_n)=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{6}+(n+1)+\frac{(n+1)(n-1)}{3}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)^2}{6}\tag{10}$$

2.2　X_n 的生成树数目

定理 2　若用 $\tau(X_n)$ 表示线性交叉四角链 X_n 生成树的数目，则

$$\tau(X_n)=2^{2n+2}\cdot 3^{n-1}\tag{11}$$

证明：由于 P_{n+1} 的生成树数目为 1，根据引理 1.10，可知

$$\tau(X_n)=2^{n-1}\cdot\tau(P_{n+1})\prod_{l=1}^{n+1}(2d_l+2)\tag{12}$$

$$=2^{n-1}\cdot 1\cdot(2\cdot 1+2)\cdot\prod_{l=2}^{n}(2\cdot 2+2)\cdot(2\cdot 1+2)\tag{13}$$

$$=2^{n-1}\cdot 4^2\cdot 6^{n-1}\tag{14}$$

$$=2^{2n+2}\cdot 3^{n-1}\tag{15}$$

定理得证。

实例验证：当 $n=1$ 时，交叉四角链 X_1 即为 K_4，

如图 3 所示。

由欧姆定律

$$r_{13}=r_{14}=r_{23}=r_{24}=r_{34}=r_{12}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \qquad (16)$$

所以，X_1 的电阻距离之和为 $\frac{1}{2}\times6=3$。

由式(5)，有

$$Kf(X_1)=\frac{(1+1)\cdot(1+2)^2}{6}=3 \qquad (17)$$

K_4 的生成树的数目为：$4^{4-2}=16$。由式(11)，有

$$\tau(K_4)=2^{2+2}\cdot3^0=16 \qquad (18)$$

故，结论成立。

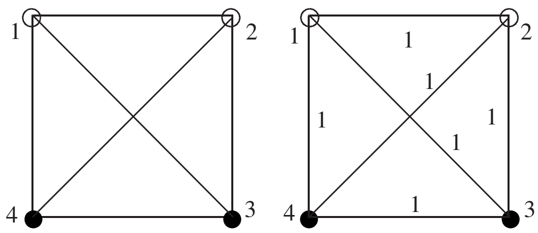


图 3 X_1

Fig.3 X_1

下面计算出了线性交叉四角链从 X_1 到 X_{50} 的基尔霍夫指标，如表 1 所示，从 X_1 到 X_{20} 的生成树的数目如表 2 所示。

表 1 线性交叉四角链从 X_1 到 X_{50} 的基尔霍夫指标

Tab.1 Kirchhoff indices of linear crossed polyomino chain from X_1 to X_{50}

G	$Kf(G)$	G	$Kf(G)$	G	$Kf(G)$	G	$Kf(G)$	G	$Kf(G)$
X_1	3.00	X_{11}	338.00	X_{21}	1 939.67	X_{31}	5 808.00	X_{41}	12 943.00
X_2	8.00	X_{12}	424.67	X_{22}	2 208.00	X_{32}	6 358.00	X_{42}	13 874.67
X_3	16.67	X_{13}	525.00	X_{23}	2 500.00	X_{33}	6 941.67	X_{43}	14 850.00
X_4	30.00	X_{14}	640.00	X_{24}	2 816.67	X_{34}	7 560.00	X_{44}	15 870.00
X_5	49.00	X_{15}	770.67	X_{25}	3 159.00	X_{35}	8 214.00	X_{45}	16 935.67
X_6	74.67	X_{16}	918.00	X_{26}	3 528.00	X_{36}	8 904.67	X_{46}	18 048.00
X_7	108.00	X_{17}	1 083.00	X_{27}	3 924.67	X_{37}	9 633.00	X_{47}	19 208.00
X_8	150.00	X_{18}	1 266.67	X_{28}	4 350.00	X_{38}	10 400.00	X_{48}	20 461.67
X_9	201.67	X_{19}	1 470.00	X_{29}	4 805.00	X_{39}	11 206.67	X_{49}	21 675.00
X_{10}	264.00	X_{20}	1 694.00	X_{30}	5 290.67	X_{40}	12 054.00	X_{50}	22 984.00

表 2 线性交叉四角链从 X_1 到 X_{20} 的生成树的数目

Tab.2 The number of spanning trees of linear crossed polyomino chain from X_1 to X_{20}

G	$\tau(G)$	G	$\tau(G)$	G	$\tau(G)$	G	$\tau(G)$
X_1	16	X_6	3 981 312	X_{11}	990 677 827 584	X_{16}	246 512 345 193 381 888
X_2	192	X_7	47 775 744	X_{12}	11 888 133 931 008	X_{17}	2 958 148 142 320 582 656
X_3	2 304	X_8	573 308 928	X_{13}	142 657 607 172 096	X_{18}	3 549 777 770 784 699 1872
X_4	27 648	X_9	6 879 707 136	X_{14}	1 711 891 286 065 152	X_{19}	425 973 332 494 163 902 464
X_5	331 776	X_{10}	82 556 485 632	X_{15}	20 542 695 432 781 824	X_{20}	5 111 679 989 929 966 829 568

3　交叉四角柱状链 G_n 的拉普拉斯谱及其应用

与上一部分相同，先利用引理 1.9 计算 G_n 的拉普拉斯谱。

由文献[20]，得 $S(C_n)=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，其中 $\zeta_i=4\sin^2\dfrac{\pi i}{n}$，$i=1,\cdots,n$。

同理，可以得到 G_n 的拉普拉斯谱

$$S(G_n)=\left(0,2\zeta_1,2\zeta_2,\cdots,2\zeta_{n-1},\underbrace{6,\cdots,6}_{n\text{个}}\right) \tag{19}$$

式中：$\zeta_i=4\sin^2\dfrac{\pi i}{n}$，$i=1,\cdots,n$。

以下是 G_n 的拉普拉斯谱的几个应用。

3.1　G_n 的基尔霍夫指标

定理 3　设 G_n 为交叉四角柱状链，则

$$Kf(G_n)=\frac{n(n^2+4n-1)}{12} \tag{20}$$

证明：由引理 1.8，有

$$Kf(G_n)=2n\sum_{k=2}^{2n}\frac{1}{\lambda_k} \tag{21}$$

$$=2n\cdot\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2\zeta_i}+n\times\frac{1}{6}\right) \tag{22}$$

$$=n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\zeta_i}+\frac{n^2}{3} \tag{23}$$

$$=Kf(C_n)+\frac{n^2}{3} \tag{24}$$

又由 $Kf(C_n)=\dfrac{n^3-n}{12}$[8]，可得

$$Kf(G_n)=\frac{n^3-n}{12}+\frac{n^2}{3}=\frac{n(n^2+4n-1)}{12} \tag{25}$$

结合定理 1 和定理 3，得到以下推论：

推论　设 X_n 和 G_n 分别为线性交叉四角链和交叉四角柱状链，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Kf(G_n)}{Kf(X_n)}=\frac{1}{2} \tag{26}$$

3.2　G_n 的生成树数目

定理 4　设 $\tau(G_n)$ 为交叉四角柱状链 G_n 生成树的数目，则

$$\tau(G_n)=2^{2n-2}\cdot 3^n\cdot n \tag{27}$$

证明：由于 G_n 的生成树数目为 n，根据引理 1.10，可知

$$\tau(G_n)=2^{n-2}\cdot\tau(C_n)\prod_{l=1}^{n}6 \tag{28}$$

$$=2^{n-2}\cdot n\cdot 6^n \tag{29}$$

$$=2^{2n-2}\cdot 3^n\cdot n \tag{30}$$

定理得证。

特别地，由于交叉四角柱状链 G_n 是一个 5 正则图，那么 $Kf^*(G_n)=\sum_{i<j}d_id_jr_{ij}=d_i^2Kf(G_n)$。根据定理 3，可以直接得到以下结论。

3.3　G_n 的度–基尔霍夫指标

定理 5　设 G_n 为交叉四角柱状链，则

$$Kf^*(G_n)=\frac{25n(n^2+4n-1)}{12} \tag{31}$$

实例验证：当 $n=1$ 时，四角柱状链 G_1 如图 4 所示。

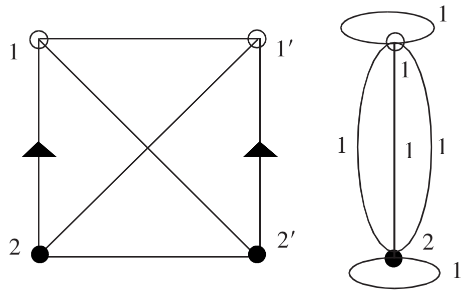


图 4　G_1
Fig.4　G_1

由欧姆定律，　$r_{12}=\dfrac{1}{1+1+1}=\dfrac{1}{3}$　(32)

故 G_1 的电阻距离之和为 $\dfrac{1}{3}$。

由式(20)，有

$$Kf(G_1)=\frac{1\cdot(1^2+4\cdot1-1)}{12}=\frac{1}{3} \tag{33}$$

G_1 的生成树的数目为 3。

由式(27)，有

$$\tau(G_1)=2^{2\cdot1-2}\cdot 3^1\cdot 1=3 \tag{34}$$

结论得证。

下面也列出了交叉四角柱状链从 G_1 到 G_{50} 的基尔霍夫指标及从 G_1 到 G_{20} 的生成树的数目，分别如表 3 和表 4 所示。

表 3 交叉四角柱状链从 G_1 到 G_{50} 的基尔霍夫指标

Tab.3 Kirchhoff indices of crossed polyomino cylinder chain from G_1 to G_{50}

G	$Kf(G)$	G	$Kf(G)$	G	$Kf(G)$	G	$Kf(G)$	G	$Kf(G)$
G_1	0.33	G_{11}	150.33	G_{21}	917.00	G_{31}	2 800.33	G_{41}	6 300.33
G_2	1.83	G_{12}	191.00	G_{22}	1 046.83	G_{32}	3 069.33	G_{42}	6 758.50
G_3	5.00	G_{13}	238.33	G_{23}	1 188.33	G_{33}	3 355.00	G_{43}	7 238.33
G_4	10.33	G_{14}	292.83	G_{24}	1 342.00	G_{34}	3 657.83	G_{44}	7 740.33
G_5	18.33	G_{15}	355.00	G_{25}	1 508.33	G_{35}	3 978.33	G_{45}	8 265.00
G_6	29.50	G_{16}	425.33	G_{26}	1 687.83	G_{36}	4 317.00	G_{46}	8 812.83
G_7	44.33	G_{17}	504.33	G_{27}	1 881.00	G_{37}	4 674.33	G_{47}	9 384.33
G_8	63.33	G_{18}	592.50	G_{28}	2 088.33	G_{38}	5 050.83	G_{48}	9 980.00
G_9	87.00	G_{19}	690.33	G_{29}	2 310.33	G_{39}	5 447.00	G_{49}	10 600.33
G_{10}	115.83	G_{20}	798.33	G_{30}	2 547.50	G_{40}	5 863.33	G_{50}	11 245.83

表 4 交叉四角柱状链从 G_1 到 G_{20} 的生成树的数目

Tab.4 The number of spanning trees of crossed polyomino cylinder chain from G_1 to G_{20}

G	$\tau(G)$	G	$\tau(G)$	G	$\tau(G)$	G	$\tau(G)$
G_1	3	G_6	4 478 976	G_{11}	2 043 273 019 392	G_{16}	739 537 035 580 145 664
G_2	72	G_7	62 705 664	G_{12}	26 748 301 344 768	G_{17}	9 429 097 203 646 857 216
G_3	1 296	G_8	859 963 392	G_{13}	347 727 917 481 984	G_{18}	119 804 999 763 983 597 568
G_4	20 736	G_9	11 609 505 792	G_{14}	4 493 714 625 921 024	G_{19}	1 517 529 997 010 458 902 528
G_5	311 040	G_{10}	154 793 410 560	G_{15}	57 776 330 904 698 880	G_{20}	19 168 799 962 237 375 610 880

4 结论

1）本文利用图的合成运算，得到了线性交叉四角链 X_n 和交叉四角柱状链 G_n 的拉普拉斯谱。

2）通过应用拉普拉斯谱，得到了这两类交叉四角链的基尔霍夫指标、生成树数目的表达式。

3）利用正则性得到了交叉四角柱状链的度-基尔霍夫指标的表达式。

4）这些表达式对这两类图的拓扑性质提供了更深入的理解。

参考文献：

[1] LIU J B, CAO J, ALOFI A, et al. Applications of laplacian spectra for n-prism networks[J]. Neurocomputing, 2016, 198: 69-73.

[2] CHUNG F R K. Spectral Graph Theory[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.

[3] KLEIN D J, RANDIC M. Resistance distance[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 1993, 12(1): 81-95.

[4] ZHU H Y, KLEIN D J, LUKOVITS I. Extensions of the wiener number[J]. Journal of Chemical Information and Computer Sciences, 1996, 36(3): 420-428.

[5] KIRCHHOFF G. Uber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man sie der Untersuchung der Linearen Verteilung Galvanischer Ströme Geührt wird[J]. Annalen der Physik, 1847, 148(12): 497-508.
[6] 李菁. 图的代数连通度[J]. 亚太教育, 2016(14): 174.
LI J. Algebraic connectivity of graphs[J]. Asia-Pacific Education, 2016(14): 174.
[7] BONCHEV D, BALABAN A T, LIU X, et al. Molecular cyclicity and centricity of polycyclic graphs. I. Cyclicity based on resistance distances or reciprocal distances[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 1994, 50(1): 1-20.
[8] LUKOVITS I, NIKOLIC S, TRINAJSTIC N. Resistance distance in regular graphs[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 1999, 71(3): 217-225.
[9] PALACIOS J L. Resistance distance in graphs and random walks[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2001, 81(1): 29-33.
[10] QI X, ZHOU B. On the degree Kirchhoff index of unicyclic graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2020, 284: 86-98.
[11] HUANG S M, LI S C. On the resistance distance and Kirchhoff index of a linear hexagonal (cylinder) chain[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2020, 558: 124999.
[12] YANG Y J, ZHANG H P. Kirchhoff index of linear hexagonal chains[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2008, 108(3): 503-512.
[13] YE L Z. On the kirchhoff index of cyclic phenylenes[J]. Journal of Mathematical Study, 2012, 45(3): 233-240.
[14] Wang Y, Zhang W. Kirchhoff index of linear pentagonal chains[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2010, 110(9): 1594-1604.
[15] PAN Y G, LIU C, LI J P. Kirchhoff indices and numbers of spanning trees of molecular graphs derived from linear crossed polyomino chain[J]. Polycyclic Aromatic Compounds, 2020: 1-8.
[16] 张先迪, 李正良. 图论及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
ZHANG X D, LI Z L. Graph Theory and its Applications [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011.
[17] CHEN H Y, ZHANG F J. Resistance distance and the normalized Laplacian spectrum[J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155(5): 654-661.
[18] GUTMAN I, MOHAR B. The quasi-wiener and the kirchhoff indices coincide[J]. Journal of Chemical Information and Computer Sciences, 1996, 36(5): 982-985.
[19] HOU Y P. Laplacian eigenvalues for composition of graphs [J]. Journal of China University of Science and Technology, 2000, 30(5): 20-23.
[20] ANDERSON W N, MONEY T D. Eigenvalues of the laplacian of a graph[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1985, 18(2): 141-145.
[21] ENTRINGER R C, JACKSON D E, SNYDER D A. Distance in graphs[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 1976, 26(2): 283-296.
[22] 陈亚飞, 茆晋晋. Maxwell 方程特征值问题的谱方法[J]. 华东交通大学学报, 2020, 37(4): 136-142.
CHEN Y F, MAO J J. The spectral method of eigenvalue problem of Maxwell[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2020, 37(4): 136-142.

第一作者：涂淑玲(1997—)，华东交通大学理学院在读硕士。研究方向为图论及其应用。2019 年本科毕业于江西科技师范大学。
E-mail: 1327006915@qq.com

通信作者：王广富(1976—)，华东交通大学理学院教授，博士。研究方向为图论及其应用。2001 年，2004 年和 2010 年分别获得兰州大学应用数学专业学士学位，硕士学位和博士学位。E-mail: wgfmath@126.com。

（责任编辑：吴海燕 姜红贵）