文章编号:1005-0523(2021)06-0114-06

双临界项的分数阶薛定谔-泊松方程组非平凡解

冯胜豪,王　莉,黄　玲

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要:通过山路引理和集中紧原理,证明了具有双临界指标的分数阶薛定谔-泊松方程组非平凡解的存在性。由于方程组存在双临界增长指标,在(PS)条件的验证和山路水平值的确定上均存在很大的困难。

关键词:分数阶薛定谔-泊松方程;变分法;双临界指标

中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A

本文引用格式:冯胜豪,王莉,黄玲. 双临界项的分数阶薛定谔-泊松方程组非平凡解[J]. 华东交通大学学报,2021,38(6):114-119.

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.2021.06.003

Nontrivial Solution for Fractional Schrödinger-Poisson Type Equations with Double Critical Terms

Feng Shenghao, Wang Li, Huang Ling

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper proves the existence of nontrivial solutions of the following fractional Schrödinger-Poisson type equations with double critical terms by using Mountain Pass Theorem and Concentration-Compactness principle. Because of the existence of double critical growth in the equations, it is difficult to verify the (PS) condition and get critical level of Mountain Pass.

Key words: fractional Schrödinger-Poisson type equations; variational method; double critical growth

Citation format: FENG S H, WANG L, HUANG L. Nontrivial solution for fractional Schrödinger-Poisson type equations with double critical terms[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2021, 38(6): 114-119.

讨论了以下非线性分数阶薛定谔-泊松方程组的一个非平凡解的存在性。

$$\left.\begin{aligned} &(-\Delta)^s u+u-\phi|u|^{2_s^*-3}u=f(u)+|u|^{2_s^*-2}u \quad \text{in} R^3\\ &(-\Delta)^s\phi=|u|^{2_s^*-1} \quad \text{in} R^3\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中:$0<s<1$;$2_s^*=\dfrac{6}{3-2s}$是$H^s(R^3)$嵌入到$L^p(R^3)$的临界 Sobolev 指标;$2\leqslant p\leqslant 2_s^*$。因为方程(1)含有两个临界 Sobolev 指标 2_s^*,所以称方程(1)是双临界指标的,且函数f满足以下条件:

(f_1) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u^{2_s^*-1}}=0$,

(f_2) 存在 $u\in(2,2_s^*)$使得

$0<\mu F(u)=\mu\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\leqslant uf(u)$, $u\in R\setminus\{0\}$。

方程(1)更一般的形式为下列薛定谔-泊松方程组:

收稿日期:2021-03-29

基金项目:国家自然科学基金项目(12161038);江西省自然科学基金项目(20202BABL201011)

$$\left.\begin{aligned}&-\Delta u+bu+q\phi|u|^3u=f(u)+|u| \quad \text{in} R^3\\&-\Delta\phi=|u|^5 \quad \text{in} R^3\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

对于方程(2)，当 $b=q=1$，$f(u)=|u|^{p-2}u$，$4\leqslant p<6$ 时，Mugani[1]利用山路定理得到方程(2)的径向对称解。在同样的情况下，D' Aprile 等[2]建立 Pohozǎev 恒等式证明了当 $p\leqslant2$ 和 $p\geqslant6$ 时，方程(2)不存在非平凡解。众所周知，在 $2<p\leqslant4$ 时，$f(u)$是不满足(AR)条件的。Ruiz[3]通过控制参数 p 和 λ 证明了当 $2<p<6$ 时，方程(2)存在一个正的径向解。此外，他利用由 Lions[4]导出的 Sobolev 不等式证明了当 $2<p\leqslant3$ 时，方程(2)没有非平凡解。后来，Zhao 等[5]在 $f(u)$满足一定的条件下用变分方法构造了一个特殊有界的(PS)序列证明了方程(2)多解的存在性。Liu 等[6]讨论了一般形式的方程

$$\left.\begin{aligned}&-\Delta u+V(x)u-K(x)\phi|u|^3u=f(x,u) \quad \text{in} R^3\\&-\Delta\phi=K(x)|u|^5 \quad \text{in} R^3\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

并利用山路引理和集中紧原理得到了方程(3)正解的存在性。而涉及两个或多个非局部项的方程组问题研究较少。Zhang 等[7]研究了分数阶非线性薛定谔-泊松方程组

$$\left.\begin{aligned}&(-\Delta)^s u+\lambda\phi u=g(u) \quad \text{in} R^3\\&(-\Delta)^s\phi=u^2 \quad \text{in} R^3\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

通过扰动法证明了方程(4)正解的存在性，并研究了含有参数 λ 时方程解的渐近性。文献[8-9]有关于分数阶更多的薛定谔-泊松方程组的研究结果。

基于上述工作，本文通过变分法，也就是把方程的解转化为相应能量泛函临界点的问题，即在寻找函数的极大和极小值。主要目的是通过集中紧原理和山路定理证明具有双临界增长分数阶薛定谔-泊松方程(1)的非平凡解的存在性。

定理 1.1　假设(f_1)和(f_2)成立，则方程组(1)至少有一个非平凡解。

1　定义

在本节中我们将给出相关函数空间的定义和非局部项 ϕ 的一些性质。分数阶 Sobolev 空间 $H^s(R^3)$描述如下

$$H^s(R^3)=\left\{u\in L^2(R^3):\int_{R^3}\left(|\xi|^{2s}+1\right)\left|\hat{u}\right|^2\mathrm{d}\xi<\infty\right\},$$

定义其内积和范数为

$$(u,v)=\int_{R^3}\left(|\xi|^{2s}+1\right)\hat{u}\hat{v}\,\mathrm{d}\xi,\ \|u\|^2_{H^s}=\int_{R^3}\left(|\xi|^{2s}+1\right)\left|\hat{u}\right|^2\mathrm{d}\xi$$

齐次分数阶 Sobolev 空间

$D^{s,2}(R^3)=\left\{u\in L^{2_s^*}(R^3):\int_{R^3}|\xi|^{2s}\left|\hat{u}\right|^2\mathrm{d}\xi<\infty\right\}$，其对应的范数为

$$[u]_s^2=\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2\mathrm{d}x,\ \|u\|_p=\left(\int_{R^3}u^px\right)^{\frac{1}{p}}。$$

已知当 $2\leqslant p\leqslant2_s^*$ 时，$H^s(R^3)$可以连续嵌入到 $L^p(R^3)$中，且对任何 $s\in(0,1)$，存在一个最佳常数[10-11]S_S：

$$S_S=\inf_{u\in D^{s,2}(R^3)\setminus\{0\}}\frac{\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{R^3}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2_s^*}}} \tag{5}$$

对于 $u\in H^s(R^3)$，我们定义

$$\|u\|:=\|u\|_{H^s(R^3)}=\left(\int_{R^3}\left[\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2+|u|^2\right]\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

作为在 $H^s(R^3)$的范数，其内积为

$$(u,v)=\int_{R^3}\left[(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v+uv\right]\mathrm{d}x \tag{6}$$

根据 Lax-Milgram 定理，对 $\forall u\in H^s(R^3)$，存在唯一的 $\phi_u^s\in D^{s,2}(R^3)$使得

$$\int_{R^3}u^{2_s^*-1}v\,\mathrm{d}x=\int_{R^3}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\phi_u^s\cdot(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

对于任何 $v\in D^{s,2}(R^3)$，ϕ_u^s 是方程$(-\Delta)^s\phi_u^s=u^{2_s^*-1}$ 的一个弱解，表示为

$$\left.\begin{aligned}&\phi_u^s=c_s\int_{R^3}\frac{u^{2_s^*-1}(y)}{|x-y|^{3-2s}}\mathrm{d}y=c_s\frac{1}{|x|^{3-2s}}*u^{2_s^*-1}\\&\forall x\in(R^3)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

这叫做 s-Riesz 势[12]，其中

$c_s=\pi^{-\frac{3}{2}}2^{-2s}\dfrac{\Gamma(\frac{3}{2}-s)}{s}$。对任何 $u\neq0$ 有 $\phi_u^s>0$。根据式(7)，式(8)和 Sobolev 不等式，有

$$[\phi_u^s]_s\leqslant S_s^{-\frac{2_s^*}{2_s}}\|u\|^{2_s^*-1} \tag{9}$$

那么

$$\int\int_{R^3\times R^3}\frac{1}{|x-y|^{3-2s}}u^{2_s^*-1}(x)u^{2_s^*-1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_{R^3}\phi_u^s u^{2_s^*-1}\mathrm{d}x\leqslant S_s^{2_s^*}\|u\|^{2(2_s^*-1)} \tag{10}$$

将 ϕ_u^s 替代 ϕ 到方程(1),得到下面的分数阶薛定谔方程

$$\left.\begin{array}{c}(-\Delta)^s u+u-\phi_u^s\|u\|^{2_s^*-3}u=f(u)+\|u\|^{2_s^*-2}u\\ x\in R^3\end{array}\right\} \tag{11}$$

其能量泛函为

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2(2_s^*-1)}\int_{R^3}\phi_u^s\|u\|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2_s^*}\int_{R^3}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\int_{R^3}F(u)\mathrm{d}x。$$

此外,由式(9)和式(10)知 $I(u)$ 是 C^1 泛函。对于任何 $v\in H^s(R^3)$,可得

$$[I'(u),v]=(u,v)-\int_{R^3}\phi_u^s|u|^{2_s^*-3}uv\mathrm{d}x-\int_{R^3}|u|^{2_s^*-2}uv\mathrm{d}x-\int_{R^s}f(u)v\mathrm{d}x\ 。$$

如果 $v\in H^s(R^3)$ 是一个临界点,则存在一对 (u,ϕ_u^s) 是方程(1)的解。

2 主要引理及其证明

引理 2.1 假设 (f_1) 和 (f_2) 成立,则存在 $\rho>0,\eta>0$ 使得当 $\forall u\in H^s(R^3)$ 满足 $\|u\|=\rho$ 时有 $\inf I(u)>\eta>0$。

证明 对任何 $\varepsilon>0$,根据 (f_1),(f_2) 和 Sobolev 不等式知,存在 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$\left|\int_{R^3}F(u)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_{R^3}|u|^2\mathrm{d}x+\frac{C_\varepsilon}{2_s^*}\int_{R^3}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2+\frac{CC_\varepsilon}{2_s^*}\|u\|^{2_s^*} \tag{12}$$

其中 C 是一个正常数。比较式(5),式(10),式(12),对于 $u\in\partial\Omega_\rho$ 和 $C>0$,有

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2(2_s^*-1)}\int_{R^3}\phi_u^s|u|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2_s^*}\int_{R^3}|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\int_{R^3}F(u)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1-\varepsilon}{2}\|u\|^2-C\|u\|^{2(2_s^*-1)}-C\|u\|^{2_s^*}=\frac{1-\varepsilon}{2}\rho^2-C\rho^{2(2_s^*-1)}-C\rho^{2_s^*}。$$

因为 $2<\min\{2_s^*,2(2_s^*-1)\}$,选取 $\varepsilon\in(0,1)$,所以一定存在 $\rho>0$ 足够小使得 $\inf I(u)=\eta>0$。

引理 2.2 假设 (f_1) 和 (f_2) 成立,则存在 $e\in H^s(R^3)$ 使得当 $\|e\|\geqslant\rho$ 时有 $I(e)<0$,其中 ρ 是引理 2.1 给出的。

证明 利用 (f_1) 和 (f_2),可得存在 $M,L>0,\mu\in(2,2_s^*)$ 使得

$$M|\tau|^\mu-L|\tau|^2\leqslant F(\tau),\ \forall\tau\in R \tag{13}$$

选择 $\mu_0\in C_0^\infty(R^3)\backslash\{0\}$,通过引理 2.1,当 $t\to+\infty$,有

$$I(tu_0)=\frac{t^2}{2}\|u_0\|^2-\frac{t^{2(2_s^*-1)}}{2(2_s^*-1)}\int_{R^3}\phi_{u_0}^s|u_0|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_{R^3}|u_0|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\int_{R^3}F(tu_0)\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{1}{2}+L\right)t^2\|u_0\|^2-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_{R^3}|u_0|^{2_s^*}\mathrm{d}x\to-\infty,$$

让 $T\geqslant1$ 足够大使 $\|Tu_0\|>\rho$,取 $e=Tu_0$,则有 $I(Tu_0)<0$。

根据 2.1,2.2 两个引理,可定义

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t)) \tag{14}$$

式中:$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1];H^s(R^3))|\gamma(0)=0;I(\gamma(1))<0\}$。

引理 2.3 假设 (f_1) 和 (f_2) 成立,如果 $\{u_n\}\subset H^s(R^3)$ 是一个 Cerami 序列,即

$$I(u_n)\to c,\ \|I'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\to0,n\to-\infty \tag{15}$$

则 $\{u_n\}$ 是有界的。

证明 当 n 足够大时,根据 (f_2) 有

$$C+1\geqslant I(u_n)-\frac{1}{\mu}[I'(u_n),u_n]=\left(\frac{\mu-2}{2\mu}\right)\|u_n\|^2+\left(\frac{1}{\mu}-\frac{2}{2(2_s^*-1)}\right)\int_{R^3}\phi_{u_n}^s|u_n|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2_s^*}\right)\int_{R^3}|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x+\int_{R^3}\left(\frac{1}{\mu}I(u_n)u_n-F(u_n)\right)\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{\mu-2}{2\mu}\right)\|u_n\|^2,$$

从而 $\{u_n\}$ 在 $H^s(R^3)$ 是有界的。

引理 2.4 假设 $\{u_n\}\subset H^s(R^3)$ 且满足当 $n\to\infty$ 时,有

$$I(u_n)\to c\in\left[0,\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}C_0S_s^{\frac{3}{2s}}\right],$$

$$\|I'(u_n)\|(1+\|u_n\|\to0。$$

其中 $C_0=\dfrac{4(2_s^*-1)2_s^*-(2_s^*)(6-2\sqrt{5})-4(2_s^*-1)(\sqrt{5}-1)}{8(2_s^*-1)2_s^*}$,则存在 $\{y_n\}\subset R^3$ 和 $R,\sigma>0$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)}u_n^2\mathrm{d}x\geqslant\sigma>0。$$

证明 我们用反证法证明。假设结论不成立,通过 (f_1) 和 (f_2) 可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^3}f(u_n)u_n\mathrm{d}x=0=\lim_{n\to\infty}\int_{R^3}F(u_n)\mathrm{d}x \tag{16}$$

然后根据式(17)和 $[I'(u_n),u_n]=O_n(1)$,当 $n\to\infty$ 时,有

$$\|u_n\|^2-\int_{R^3}\phi_{u_n}|u_n|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x-\int_{R^3}|u_n|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x=O_n(1) \quad (17)$$

为了方便计算，当 $n\to\infty$ 时，令 $a_n=\int_{R^3}\phi_{u_n}|u_n|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x$ 且 $b_n=\int_{R^3}|u_n|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x$，此外，不失一般性，我们假设当 $n\to\infty$ 时，令 $\|u_n\|^2\to l, a_n\to a, b_n\to b$。因为

$$\int_{R^3}|u_n|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x=\int_{R^3}(-\Delta)^s\phi_{u_n}^s u_n\mathrm{d}x=$$
$$\int_{R^3}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\phi_{u_n}^s(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_n\mathrm{d}x\le$$
$$\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac s2}\phi^s_{u_n}\right|^2\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac s2}u_n\right|^2\mathrm{d}x\le$$
$$\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{R^3}\phi^s_{u_n}u_n^{2_s^*-1}\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^2}{2}\|u_n\|^2;$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，得到 $b\le\frac{1}{2\varepsilon^2}a+\frac{\varepsilon^2}{2}l$，令 $\varepsilon^2=\frac{\sqrt5-1}{2}$，由式(18)知 $l=a+b$，从而 $a\ge\frac{3-\sqrt5}{2}l$。根据式(16)和式(17)有

$$c=\frac l2-\frac{a}{2(2_s^*-1)}-\frac{b}{2_s^*}\ge C_0 l \quad (18)$$

另外，根据式(10)和式(18)得出 $l\le S_s^{-1}l^{\frac{2_s^*}{2}}+S_s^{-2-\frac{1}{2_s^*}}l^{1-\frac{1}{2_s^*}}$，得到 $l=0$ 或 $l^2\ge\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}S_s^{\frac{6}{2_s}}$。若 $l=0$，则 $c=0$，与 $c>0$ 矛盾；若 $l^2\ge\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}S_s^{\frac{6}{2_s}}$，则 $c\ge\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}C_0S_s^{\frac{3}{2_s}}$，这与 $c<\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}C_0S_s^{\frac{3}{2_s}}$ 矛盾。

引理 2.5　设 $A,B,C>0$，定义 $h:[0,\infty)\to R$，其中

$$h(t)=\frac A2t^2-\frac{B}{2(2_s^*-1)}t^{2(2_s^*-1)}-\frac{C}{2_s^*}t^{2_s^*}$$

则有

$$\sup_{t\in[0,\infty)}h(t)=\left(\frac{\sqrt{C^2+4AB}-C}{2B}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}\cdot$$
$$\frac{4AB(2_s^*-1)2_s^*-(\sqrt{C^2+4AB}-C)^2 2_s^*-4C(\sqrt{C^2+4AB}-C)^2(2_s^*-1)}{8B(2_s^*-1)2_s^*}。$$

证明　对于 $t\ge0$，有

$$h'(t)=At-Bt^{2(2_s^*-1)-1}-Ct^{2_s^*-1}t^{2s^*-1}=t(A-Bt^{2(2_s^*-2)}-Ct^{2_s^*-2}),$$

令 $A-Bt^{2(2_s^*-2)}-Ct^{2_s^*-2}=0$，则有 $t^{2_s^*-2}=\frac{\sqrt{C^2+4AB}-C}{2B}$，然后代入到 $h(t)$ 中，就得到了上述结果。

令 $\Psi\in C_0^\infty(R^3)$ 一个截断函数，若 $|x|<r$ 则 $\Psi(x)=1$，若 $|x|\ge2r$，则 $\Psi(x)=0$。对于 $\varepsilon>0$，定义

$$u_\varepsilon(x)=\Psi(x)U_\varepsilon(x), x=R^3,$$

这里 $U_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-\frac{3-2s}{2}}u^*\left(\frac x\varepsilon\right)$；$u^*(x)=\frac{U\left(\frac{x}{S_s^{\frac{1}{2s}}}\right)}{\|U\|_{2_s^*}}$；$U(x)=\kappa(\tau^2+|x-x_0|^2)^{-\frac{3-2s}{2}}$。

其中 $\kappa\in R\backslash\{0\}$，$\tau>0$，$x_0\in R^3$。根据文献[13-14]可以得到

$$\left.\begin{aligned}&\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac s2}u_\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x\le S_s^{\frac{3}{2s}}+O(\varepsilon^{3-2\varepsilon})\\&\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{2_s^*}x=S_s^{\frac{3}{2s}}+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

且

$$\int_{R^3}|u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=\begin{cases}O\left(\varepsilon^{3-\frac{3-2s}{2}q}\right),q>\frac{3}{3-2s}\\O\left(\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{2}}|\log\varepsilon|\right),q=\frac{3}{3-2s}\\O\left(\varepsilon^{\frac{3-2s}{2}q}\right),q<\frac{3}{3-2s}\end{cases}\quad(20)$$

引理 2.6　令

$$g(t)=\frac{t^2}{2}\|u_g\|^2-\frac{t^{2(2_s^*-1)}}{2(2_s^*-1)}\int_{R^3}\phi^s_{u_\varepsilon}|u_\varepsilon|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{2_s^*}\mathrm{d}x,$$

则当 $\varepsilon\to0^+$ 时，有

$$\sup_{t\ge0}g(t)\le\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}C_0S_s^{\frac{3}{2s}}+O(\varepsilon^{3-2s})。$$

证明　因为 $(-\Delta)^s\phi^s_{u_\varepsilon}=|u_\varepsilon|^{2_s^*-1}$，则有

$$\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{2_s^*}\mathrm{d}x=\int_{R^3}(-\Delta)^s\phi^s_{u_\varepsilon}u_\varepsilon\mathrm{d}x=\int_{R^3}(-\Delta)^{\frac s2}\phi^s_{u_\varepsilon}(-\Delta)^{\frac s2}u_\varepsilon\mathrm{d}x\le$$
$$\frac12\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac s2}\phi^s_{u_\varepsilon}\right|^2\mathrm{d}x+\frac12\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac s2}u_\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x,$$

由式(19)可得，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，

$$\int_{R^3}\phi^s_{u_\varepsilon}|u_\varepsilon|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x\ge2\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac s2}u_\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x=$$
$$S_s^{\frac{3}{2s}}+O(\varepsilon^{3-2s}) \quad (21)$$

联合引理 2.5 即得

$$g(t)=\frac{t^2}{2}\|u_\varepsilon\|^2-\frac{t^{2(2_s^*-1)}}{2(2_s^*-1)}\int_{R^3}\phi_{u_\varepsilon}^s|u_\varepsilon|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{2_s^*}\mathrm{d}x\le\frac{t^2}{2}\left(S_s^{\frac{3}{2s}}+O(\varepsilon^{3-2s})\right)-\frac{t^{2(2_s^*-1)}}{2(2_s^*-1)}\left(S_s^{\frac{3}{2s}}+O(\varepsilon^{3-2s})\right)-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\left(S_s^{\frac{3}{2s}}+O(\varepsilon^{3-2s})\right)\le\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}C_0S_s^{\frac{3}{2s}}+O(\varepsilon^{3-2s})$$

引理 2.7 式(14)所定义的 c 满足

$$0<c<\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}C_0S_s^{\frac{3}{2s}}。$$

证明 根据引理 2.1 和引理 2.2 知,存在 $t_\varepsilon>0$ 使得

$$I(t_\varepsilon u_\varepsilon)=\sup_{t\geqslant0}I(tu_\varepsilon)>0。$$

对所有 $\varepsilon>0$,存在 $\tilde{t}_\varepsilon>0$ 使得 $\|\tilde{t}_\varepsilon u_\varepsilon\|=\rho$,根据引理 2.2 有 $0<\eta\leqslant I(\tilde{t}_\varepsilon u_\varepsilon)\leqslant I(t_\varepsilon u_\varepsilon)$。

并且

$$I'(t_\varepsilon u_\varepsilon)=t_\varepsilon\|u_g\|^2-t_\varepsilon^{2(2_s^*-1)}\int_{R^3}\phi_{u_\varepsilon}^s|u_\varepsilon|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x-t_\varepsilon^{2(2_s^*-1)}\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\int_{R^3}f(t_\varepsilon u_\varepsilon)u_\varepsilon\mathrm{d}x=0\ 。$$

由 (f_1) 有

$$(1-\varepsilon)\|u_\varepsilon\|^2\leqslant t_\varepsilon^{2_s^*-2}\left(t_\varepsilon^{2_s^*-2}\int_{R^3}\phi_{u_\varepsilon}^s|u_\varepsilon|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x+\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{2_s^*}\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right),$$

由 I 的连续性,存在 $\varepsilon_1>0,T_1>0$ 使得对任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$,有 $t_\varepsilon\geqslant T_1$。

由 (f_2) 有

$$(1+2L)\|u_\varepsilon\|^2\geqslant t_\varepsilon^{2_s^*-2}\left(t_\varepsilon^{2_s^*-2}\int_{R^3}\phi_{u_\varepsilon}^s|u_\varepsilon|^{2_s^*-1}\mathrm{d}x+\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)+M\mu t_\varepsilon^{\mu-2}\int_{R^3}|u_\varepsilon|^{\mu}\mathrm{d}x,$$

可知存在 $\varepsilon_2>0$ 和 $T_2>0$ 使得对任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$,有 $t_\varepsilon\leqslant T_2$。

根据 (f_1) 和 (f_2),存在 $M_1,L_1>0$ 使得

$$M_1|u|^{\mu}-L_1|u|^{\frac{2_s^*}{2}-1}\leqslant F(u),u\in R,$$

结合引理 2.6,可以得到当 $\varepsilon>0$ 足够小时,有

$$I(t_\varepsilon u_\varepsilon)=\sup_{t\geqslant0}g(t)+L_1\|u_\varepsilon\|_{\frac{2_s^*-1}{2}}^{\frac{2_s^*}{2}-1}-M_1\|u_\varepsilon\|_{\mu}^{\mu}\leqslant\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}C_0S_s^{\frac{3}{2s}}+O(\varepsilon^{3-2s})。$$

取 $\varepsilon>0$ 足够小,由 $\mu\in(2,2_s^*)$,有

$$0<\eta\leqslant c\leqslant I(t_\varepsilon u_\varepsilon)<\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{2}{2_s^*-2}}C_0S_s^{\frac{3}{2s}}。$$

3 主要结果的证明

由引理 2.1,引理 2.2 可得存在一个序列 $\{u_n\}\subset H^s(R^3)$ 使得式(17)成立。根据引理 2.3 知道 $\{u_n\}$ 在 $H^s(R^3)$ 是有界的,由引理 2.4 和引理 2.7 存在 $\sigma>0$,$R>0$ 和 $y_n\in R^3$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\int_{B_R(y_n)}|u_n(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\sigma$。现在令 $v_n(x)=u_n(x+y_n)$,那么有

$$\lim_{n\to\infty}\sup\int_{B_R(0)}|v_n(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\sigma\tag{22}$$

注意 $\|u_n\|=\|v_n\|$,则存在子序列,仍记为 $v_n,v_n\in H^s(R^3)$ 使得 $v_n(x)\to v$,并且在 R 内 $v_n\to v$ 几乎处处成立。根据式(22)知 $v\neq0$。选取 $\varphi\in C_0^\infty(R^3)$,可得

$$[I'(v_n),\varphi]=\int_{R^3}\left(\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v_n\right|\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi\right|+v_n\varphi\right)\mathrm{d}x-\int_{R^3}\phi_{v_n}^s|v_n|^{2_s^*-2}v_n\varphi\mathrm{d}x-\int_{R^3}|v_n|^{2_s^*-2}v_n\varphi\mathrm{d}x-\int_{R^3}f(v_n)\varphi\mathrm{d}x。$$

由文献[15-16]可知在 $D^{s,2}(R^3)$ 有 $\phi_{v_n}^s\to\phi_v^s$,意味着 $L^{2_s^*}(R^3)$ 在中有 $\phi_{v_n}^s\to\phi_v^s$。从而当 $n\to\infty$ 时,有

$$\int_{R^3}\left|\phi_{v_n}^s-\phi_v^s\|v\right|^{2_s^*-3}v\varphi\mathrm{d}x\to0\tag{23}$$

又因为

$$\int_{R^3}\phi_{v_n}^s\left(|v_n|^{2_s^*-3}v_n-|v|^{2_s^*-3}v\right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-1}}\mathrm{d}x\leqslant C\left(\left|\phi_{v_n}^s\right|_{2_s^*}^{\frac{2_s^*}{2_s^*-1}}|v_n|_{2_s^*}^{\frac{2_s^*(2_s^*-2)}{2_s^*-1}}+\left|\phi_{v_n}^s\right|_{2_s^*}^{\frac{2_s^*}{2_s^*-1}}|v|_{2_s^*}^{\frac{2_s^*(2_s^*-2)}{2_s^*-1}}\right)\leqslant C$$

则当 $n\to\infty$ 时,有

$$\int_{R^3}\phi_{v_n}^s\left(|v_n|^{2_s^*-3}v_n\right)-\left(|v|^{2_s^*-3}v\right)\varphi\mathrm{d}x\to0\tag{24}$$

通过式(23)和式(24),发现当 $n\to\infty$ 时,

$$\int_{R^3}\phi_{v_n}^s|v_n|^{2_s^*-3}v_n\varphi\mathrm{d}x-\int_{R^3}\phi_{v_n}^s|v|^{2_s^*-3}v\varphi\mathrm{d}x\leqslant\int_{R^3}\left|\phi_{v_n}^s\left(|v_n|^{2_s^*-3}v_n\right)-\left(|v|^{2_s^*-3}v\right)\varphi\right|\mathrm{d}x+\int_{R^3}\left|\phi_{v_n}^s-\phi_v^s\right||v|^{2_s^*-3}v\varphi\mathrm{d}x\to0。$$

从而当 $n\to\infty$ 时,有

$$\int_{R^3}\phi_{v_n}^s|v_n|^{2_s^*-3}v_n\varphi\mathrm{d}x\to\int_{R^3}\phi_{v_n}^s|v|^{2_s^*-3}v\varphi\mathrm{d}x\tag{25}$$

$$\int_{R^3}|v|^{2_s^*-3}v_n\varphi\mathrm{d}x\to\int_{R^3}|v|^{2_s^*-3}v\varphi\mathrm{d}x \tag{26}$$

根据 $\int_{R^3}v_n\varphi\mathrm{d}x\to\int_{R^3}v\varphi\mathrm{d}x$，$\int_{R^3}|v_n|^{2_s^*-3}\varphi\mathrm{d}x\to\int_{R^3}|v|^{2_s^*-3}\varphi\mathrm{d}x$ 和条件(f_1)，(f_2)，则有

$$\int_{R^3}f(v_n)\varphi\mathrm{d}x\to\int_{R^3}f(v)\varphi\mathrm{d}x\to\infty \tag{27}$$

结合式(25)~式(27)，可推出$\lim\limits_{n\to\infty}[I'(v_n),\varphi]=[I'(v_n),\varphi]$。从而对任意 $\varphi\in C_0^\infty(R^3)$，取 $\varphi(x)=\varphi(x-y_n)$，有

$$[I'(v_n),\varphi]=\lim_{n\to\infty}[I'(v_n),\varphi]=\lim_{n\to\infty}[I'(u_n),\varphi_n]=0,$$

方程(1)存在一个非平凡解。

参考文献：

[1] MUGANI D. Existence of solitary waves for the nonlinear klein-gordon-maxwell and Schrödinger-maxwell equations[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 2004, 134: 893-906.

[2] D'APRILE T, MUGANI D. Non-existence results for the coupled klein-gordon-maxwell equations[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2004(4): 307-322.

[3] RUIZ D. The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 237: 655-674.

[4] LIONS P L. Solutions of hartree-fock equations for coulomb systems[J]. Communications in Mathematical Physics, 1984, 109: 33-97.

[5] ZHAO L, ZHAO F. On the existence of solutions for the Schrödinger-Poisson equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 346: 155-169.

[6] LIU Z, ZHANG J. Multiplicity and concentration of positive solutions for the fractional Schrödinger-Poisson systems with critical growth[J]. Optimisation and Calculus of Variations, 2017, 23: 1515-1542.

[7] ZHANG J, O JOAO MARCOS DO, SQUASSINA M. Fractional Schrödinger-Poisson systems with a general subcritical or critical nonlinearity[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2016, 16: 15-30.

[8] HUANG W, WANG L. Ground state solutions of neharipohozǎev type for a fractional Schrödinger-Poisson system with critical growth[J]. Acta Mathematica Scientia, 2020, 40(4): 1064-1080.

[9] LIU W. Existence of multi-bump solutions for the fractional Schrödinger-Poisson system[J]. Journal of Mathematical Physics, 2016, 57(9): 779-791.

[10] COTSIOLIS A, TAVOULARIS N K. Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 295: 225-236.

[11] OLIVIER, DRUET. Best constants in Sobolev inequalities [J]. Comptes Rendus De Lacadémie Des Sciences, 1998, 326(8): 965-969.

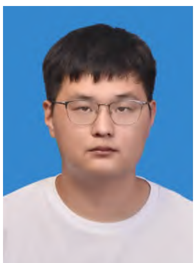
[12] CAFFARELLI L, SILVERSTRE L. An extension problem related to the fractional laplacian[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2007, 32: 1245-1260.

[13] PENG X, JIA G, HUANG C. Multiplicity of solutions for Schrödinger-Poisson system with critical exponent in R^3 [J]. AIMS Mathematics, 2021, 6(3): 2059-2077.

[14] TENG K. Corrigendum to Existence of ground state solutions for the nonlinear fractional Schrödinger-Poisson system with critical Sobolev exponent[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 262: 3132-3138.

[15] LUO H X, TANG X H. Ground state and multiple solutions for the fractional Schrödinger-Poisson system with critical Sobolev exponent[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2018, 42: 24-52.

[16] TENG K. Existence of ground state solutions for the nonlinear fractional Schrödinger Poisson system with critical Sobolev exponent[J]. Journal of Differential Equations, 2016, 261: 3061-3106.



第一作者：冯胜豪(1995—)，华东交通大学硕士研究生，研究方向为偏微分方程。2019 年本科毕业于辽宁工程技术大学。E-mail:m18342834223@163.com。

通信作者：王莉(1983—)，华东交通大学副教授，博士，研究方向为偏微分方程。2002 年，2006 年，2009 年分别获得湖北民族学院，华中师范大学基础数学学士，应用数学硕士学位和博士学位。E-mail:wangli.423@163.com。

（责任编辑：刘棉玲）