文章编号:1005-0523(2023)02-0103-09

分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组解的存在性

钟巧澄,王 莉,王 军

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要:研究了一类分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组非平凡解的存在性和多重性。在不同非线性项的假设条件下,通过变分法和对称山路定理得到了解的存在性和多重性。

关键词:分数阶 Laplacian 方程组;多重性;临界点

中图分类号:O176.3 **文献标志码**:A

本文引用格式:钟巧澄,王莉,王军. 分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组解的存在性[J]. 华东交通大学学报,2023,40(2):103-111.

DOI:10.16749/j.cnki.jecjtu.20230330.006

Existence of Solutions for Fractional Schrödinger-Poisson Equations

Zhong Qiaocheng, Wang Li, Wang Jun

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The existence of nontrivial solutions for fractional Schrödinger-Poisson equations in a bounded domain is discussed. Under different assumptions of nonlinearities, existence and multiplicity by variational methods and symmetric Mountain Pass theorem are obtained.

Key words: fractional Laplacian equation; multiplicity results; critical points

Citation format: ZHONG Q C, WANG L, WANG J. Existence of solutions for fractional Schrödinger-Poisson equations[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2023, 40(2): 103-111.

考虑下列分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组非平凡解的存在性和多重性。

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u+V(x)u+\phi(x)u= & \\ f(x,u)+\lambda g(x,u)+h(x), & x\in\Omega \\ (-\Delta)^t\phi(x)=u^2, & x\in\Omega \\ u=0, & x\in\mathbf{R}^3\backslash\Omega \end{cases} \tag{1}$$

式中:$s,t\in(0,1)$且$2t+4s>3$;$\Omega\subset\mathbf{R}^3$中一个有界域;势函数$V:\Omega\to\mathbf{R}^+$是连续的;$\lambda$是一个正的常数;$f,g,h$是连续函数;$(-\Delta)^s$是分数阶 Laplacian 算子,其定义为

$$(-\Delta)^s\varphi(x)=2\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbf{R}^3\backslash B_\varepsilon(x)}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}y,\ x\in\Omega$$

式中:函数$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$;$B_\varepsilon(x)$表示以$x\in\Omega$为中心,$\varepsilon>0$为半径的球。值得指出的是当$\tau\to1^-$,分数阶拉普拉斯算子$(-\Delta)^\tau$变成了经典的拉普拉斯算子$-\Delta$,参考文献[1]中性质4.4。从概率的观点来看,分数阶拉普拉斯算子可以看作是 Lévy 过程的无穷小生成元[2]。在应用科学中,这个算子出现在对各种现象的

收稿日期:2022-04-12

基金项目:国家自然科学基金项目(12161038);江西省自然科学基金项目(20202BABL211004);江西省科技厅项目(GJJ212204, GJJ2200635)

描述中，如离子物理[3]，火焰传播[4]，金融[5]，自由边界障碍问题[6]，Signorin 问题[7]，具有临界分数阶扩散 Hamilton-Jacobi 方程[8]，或伽马收敛框架中的相变[9]。关于分数阶 Laplacian 算子的更多细节，建议读者参考文献[1]和文献[10]。

在过去十年，在势函数和非线性项满足不同的假设条件下，通过临界点理论，许多研究者对方程组(1)解的存在性和多重性感兴趣。例如，Zhang 等[11]考虑了下列分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+\lambda\phi u=g(x), & x\in\mathbf{R}^3\\ (-\Delta)^t\phi=u^2, & x\in\mathbf{R}^3\end{cases}$$

式中：$\lambda>0$ 且 g 满足次临界或者临界增长条件。通过扰动的方法，当 λ 足够小时，得到了解的存在性。Teng 等[12]研究了下列分数阶Schrödinger-Poisson 方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+V(x)u+\phi u=\mu|u|^{q-1}+|u|^{2_s^*-2}u, & x\in\mathbf{R}^3\\ (-\Delta)^t\phi=u^2, & x\in\mathbf{R}^3\end{cases}$$

式中：$\mu>0$ 是一个参数，$2_s^*=\dfrac{2N}{N-2s}$。通过使用 Pohozǎev-Nehari 流形，得到了非平凡基态解的存在性。通过对称山路定理，Zhi 等[13]得到了分数阶 p-Laplacian 方程非平凡解的存在性。冯胜豪等[14]讨论了下列非线性分数阶 Schrödinger-Poisson 方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+u-\phi|u|^{2_s^*-3}u=f(u)+|u|^{2_s^*-2}u, & x\in\mathbf{R}^3\\ (-\Delta)^s\phi=|u|^{2_s^*-1}, & x\in\mathbf{R}^3\end{cases}$$

在 f 满足一定的条件下，通过山路定理和集中紧原理，作者们得到了非平凡解的存在性。推荐读者参考文献[15]和文献[16]以获得更多关于分数阶 Schrödinger-Poisson 方程的最新结果。

基于上述工作的启发，研究式(1)解的存在性和多重性。据我们分析，非线性项在无穷远和原点附近的增长条件不同，存在性和多重性的结果是完全不同的。与 Zhi 等[13]相比，本文利用较弱的条件得到了相似的结论。

1 准备工作和主要结果

在本节中，将概述式(1)的变分结构并给出其非局部项 ϕ_u 的性质。

分数阶 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}^3)$ 可用下列 Fourier变换描述

$$H^s(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega):\int_\Omega(|\xi|^{2s}+1)|\hat{u}|^2\,\mathrm{d}\xi<\infty\right\}$$

其内积和范数的定义为

$$(u,v)=\int_\Omega(|\xi|^{2s}+1)\hat{u}\bar{\hat{v}}\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\|u\|_{H^s}^2=\int_\Omega(|\xi|^{2s}+1)|\hat{u}|^2\,\mathrm{d}\xi$$

基于 Plancherel 定理，有

$$(u,v)=\int_\Omega((-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v+uv)\mathrm{d}x,$$

$$\|u\|_{H^s}^2=\int_\Omega(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+|u|^2)\mathrm{d}x$$

齐次分数阶 Sobolev 空间

$$D^s(\Omega)=\left\{u\in L^{2_s^*}(\Omega):\int_\Omega|\xi|^{2s}|\hat{u}|^2\,\mathrm{d}\xi<\infty\right\}$$

为范数 $[u]_s^2$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 的完备空间，其中

$$[u]_s^2=\int_\Omega|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{3+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据文献[1]中定理6.5，当 $2\leqslant p<2_s^*$，$H^s(\Omega)$ 可以连续嵌入到 $L^p(\Omega)$，且对于任意的 $s\in(0,1)$，存在一个最佳常数 $S_s>0$ 使得

$$S_s=\inf_{u\in D^{s,2}(\Omega)\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)^{2/2_s^*}} \tag{2}$$

定义

$$E=\{u\in H^s(\Omega):\int_\Omega V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x<\infty\},$$

其内积和范数分别为

$$\langle u,v\rangle_E=\int_\Omega((-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v+V(x)uv)\mathrm{d}x,$$

$$\|u\|_E=\left(\int_\Omega(|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2+V(x)|u|^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

众所周知，问题(1)可以化简为带有非局部项的单一方程。因为 $s,t\in(0,1)$ 且 $2t+4s>3$，那么有 $\dfrac{12}{3+2t}<\dfrac{6}{3-2s}$ 成立，$H^s(\Omega)$ 可以紧嵌入到 $L^{\frac{12}{3+2t}}(\Omega)$。对于 $\forall u\in H^s(\Omega)$，在 $D^t(\Omega)$ 中定义线性泛函 L_u 为

$$L_u(v)=\int_\Omega u^2v\,\mathrm{d}x,\quad \forall v\in D^t(\Omega)。$$

然后，从 Hölder 不等式和式(2)中得到，存在 $C_1,C_2>0$ 使得

$$|L_u(v)|\leqslant\left(\int_\Omega|u(x)^2|^{\frac{6}{3+2t}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3+2t}{6}}\left(\int_\Omega|v(x)|^{\frac{6}{3-2t}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3-2t}{6}}$$

$$\leqslant C_1S_t^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{H^t}^2[v]_t=C_2\|u\|_{H^t}^2[v]_t \tag{4}$$

所以，根据 Lax–Milgram 定理，对于每一个 $u\in H^t(\Omega)$，都存在唯一一个 $\phi_u^t\in D^t(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega u^2v\mathrm{d}x=\int_\Omega(-\Delta)^{\frac{t}{2}}\phi_u^t\cdot(-\Delta)^{\frac{t}{2}}v\mathrm{d}x \tag{5}$$

即对于任意的 $v\in D^t(\Omega)$，ϕ_u^t 是

$$(-\Delta)^t\phi_u^t=u^2,\quad x\in\Omega$$

的弱解，且

$$\phi_u^t=c_t\int_\Omega\frac{u^2(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y=c_t\frac{1}{|x|^{3-2t}}*u^2,\ \forall x\in\Omega \tag{6}$$

此式被称为 t–Riesz 势，其中

$$c_t=\pi^{-\frac{3}{2}}2^{-2t}\frac{\Gamma(3-2t)}{\Gamma(t)},$$

同时，由式(4)、式(5)和 Sobolev 不等式知，存在 C_3，C_4，$C_5>0$，使得

$$[\phi_u^t]_t\leqslant C_3\|u\|_{H^t(\Omega)}^2,\|\phi_u^t\|_{L^{2_t^*}(\Omega)}\leqslant C_4[\phi_u^t]_t \tag{7}$$

和

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{1}{|x-y|^{3-2t}}u^2(x)u^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega\phi_u^tu^2\mathrm{d}x\leqslant C_5\|u\|_{H^t}^4 \tag{8}$$

把 ϕ_u^t 代入问题(1)，得到下列单一的分数阶 Schrödinger 方程

$$(-\Delta)^su+V(x)u+\phi_u^t(x)u=f(x,u)+\lambda g(x,u)+h(x),x\in\Omega \tag{9}$$

显然，问题(9)的解可通过寻找能量泛函 $I:E\to\mathbf{R}$

$$I(u)=\frac{1}{2}([u]_s^2+\int_\Omega V(x)|u|^2\mathrm{d}x)+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u^t(x)u^2\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x$$

的临界点得到，其中 $F(x,\xi)=\int_0^\xi f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$，$G(x,\xi)=\int_0^\xi g(x,\tau)\mathrm{d}\tau$。另外，由式(7)和式(8)知 $I\in C^1$，对于 $\forall v\in E$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_\Omega[(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v+V(x)uv]\mathrm{d}x+\int_\Omega\phi_u^tuv\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega g(x,u)v\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)v\mathrm{d}x$$

如果 $u\in E$ 是 I 的临界点，则(u,ϕ_u^t)为问题(1)的弱解，其中 ϕ_u^t 由式(6)定义。

设势函数 $V\in C(\Omega)$ 为一个连续函数，假设(V)存在 $L>0$ 使得 $\inf_{x\in\Omega}V(x)>L$ 且对于 $\forall V_0\in\mathbf{R}$，$\mathrm{meas}\{x\in\Omega:-\infty<V(x)\leqslant V_0\}<+\infty$。

因为 $V(x)$满足条件(V)，所以有以下嵌入定理。

引理 1.1[17]　设 $0<s<1$ 且 $s<N/2$，$V(x)$满足条件(V)。如果 $r_1\in[1,2_s^*]$，那么 E 可以连续嵌入到 $D^s(\Omega)$，$D^s(\Omega)$可以连续嵌入到 $L^{r_1}(\Omega)$，且对于 $\forall u\in E$ 有 $[u]_s\leqslant C\|u\|_E$，其中 C 是一个常数。特别地，对于 $\forall r_1\in[1,2_s^*]$，对于 $\forall u\in E$，存在一个常数 C_{r_1} 使得

$$\|u\|_{L^{r_1}(\Omega)}\leqslant C_{r_1}\|u\|_E \tag{10}$$

如果 $r_1\in[1,2_s^*)$，那么可以紧嵌入到 $L^{r_1}(\Omega)$。

定义算子 $\Phi:H^t(\Omega)\to D^t(\Omega)$为 $\Phi[u]=\phi_u^t$。在下面的引理中，总结了一些对研究问题有用的 Φ 的性质，其证明与 Zhang 等[11]，Teng[18]的一样。

引理 1.2　对任意的 $u\in H^t(\Omega)$，有

1）Φ 是连续的；

2）Φ 将有界集合映射到有界集合；

3）$\int_\Omega\Phi u^2\mathrm{d}x\leqslant S_t^2\|u\|_{L^{\frac{12}{3+2t}}}^4$；

4）如果在 $H^t(\Omega)$内有 u_n 弱收敛到 u，那么在 $D^t(\Omega)$内有 $\Phi[u_n]$弱收敛到 $\Phi[u]$；

5）对任意的 $\vartheta\in\mathbf{R}$ 都有 $\Phi[\vartheta u]=\vartheta^2\Phi[u]$；

6）如果在 $H^t(\Omega)$内有 u_n 弱收敛到 u 且对于 $\forall 2\leqslant r_2<2_s^*$，在 $L^{r_2}(\Omega)$内有 u_n 强收敛到 u，那么 $\forall v\in E$ 有

$$\int_\Omega\phi_{u_n}^t(x)u_nv\mathrm{d}x\to\int_\Omega\phi_u^t(x)uv\mathrm{d}x \text{ 且}$$

$$\int_\Omega\phi_{u_n}^t(x)u_n^2\mathrm{d}x\to\int_\Omega\phi_u^t(x)u^2\mathrm{d}x。$$

本文用变分法对式(1)进行研究，包括山路定理，Bonanno 和 Kajikiya 的临界点理论。一般地，需要验证泛函的几何结构并证明泛函满足临界点理论的紧性条件。但本文由于临界非线性项的存在，能量泛函只在某些范围内可以满足紧性条件，本文应用不同形式的变分定理来证明解的存在性。假设非线性项 $f,g,h\in C(\Omega,\mathbf{R})$且满足下列假设：

(f_1)当几乎处处 $x\in\Omega$ 时，$\lim\limits_{|\tau|\to 0}\dfrac{f(x,\tau)}{\tau}=0$ 一致成立；

$(\tilde{f}_1)$当几乎处处 $x\in\Omega$ 时，$\lim\limits_{|\tau|\to 0}\dfrac{f(x,\tau)}{\tau}=\infty$ 一致成立；

(f_2)当几乎处处 $x\in\Omega$ 时，$\lim\limits_{|\tau|\to\infty}\dfrac{f(x,\tau)}{\tau^{2_s^*-1}}=0$ 一致成立；

(f_3)存在 $v\in(4,2_s^*)$使得

$0<vF(\tau)\leqslant f(\tau)\tau,\ \forall|\tau|>0$；

$(g_1)|g(x,\tau)|\leqslant c(1+|\tau|^{r_3-1}),\ \forall\tau\in\mathbf{R},1\leqslant r_3<2$；

$(g_2)f(x,\cdot)$是奇的且 $g=|u|^{2_s^*-2}u$。

下面陈述本文的主要结果。

定理 1.1 设 $t\in(0,1)$，$2t+4s>3$，若(f_1)，(f_2)，(f_3)，(g_1)成立，那么存在 $\lambda^*>0$ 且对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^*)$，存在 $\gamma>0$ 使得对任意的$|h|_2^2\in(0,\gamma)$，式(1)有一个山路解。

定理 1.2 设 $t\in(0,1)$，$s>\dfrac{3}{4}$，若$(\tilde{f}_1)$，(f_2)，(g_2)成立且 $h=0$，那么存在 $\lambda^*>0$ 且对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^*)$，式(1)有一列非平凡解$\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset E$ 使得当 $n\to\infty$ 时有 $u_n\to 0$。

2 山路解的存在性

接下来，证明泛函 I 满足山路几何条件。

引理 2.1 若(f_1)，(f_2)，(f_3)，(g_1)成立，那么泛函 I 满足山路几何结构

1) 存在 $\alpha,\rho>0$ 使得 $I(u)\geqslant\alpha$ 且$\|u\|=\rho$；

2) 存在 $e\in E$ 且$\|e\|>\rho$ 使得 $I(e)<0$。

证明 1)根据(f_1)和(f_2)，对固定的 $\varepsilon>0$，存在 C_ε 使得

$$|F(\tau)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|\tau|^2+\frac{C_\varepsilon}{2_s^*}|\tau|^{2_s^*}\tag{11}$$

根据式(11)和 Cauchy 不等式，得到

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac{1}{2}\|u\|_E^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u^t u^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-\\&\lambda\int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x\\\geqslant&\frac{1}{2}\|u\|_E^2-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega G(x,u)\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x\\\geqslant&\frac{1}{2}\|u\|_E^2-\int_\Omega\Big(\frac{\varepsilon}{2}|u|^2+\frac{C_\varepsilon}{2_s^*}|u|^{2_s^*}\Big)\mathrm{d}x-\\&\lambda\int_\Omega\Big(c|u|+\frac{c}{r_3}|u|^{r_3}\Big)\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x\\\geqslant&\frac{1}{4}\|u\|_E^2-C_6\|u\|_E^{2_s^*}-\lambda C_7\|u\|_E-\lambda C_8\|u\|_E^{r_3}-C_\varepsilon'|h|_2^2\\=&\|u\|_E^2\Big(\frac{1}{4}-C_6\|u\|_E^{2_s^*-2}-\lambda C_7\|u\|_E^{-1}-\lambda C_8\|u\|_E^{r_3-2}\Big)-C_\varepsilon'|h|_2^2,\end{aligned}$$

式中：C_6,C_7,C_8 是常数。考虑函数

$$\zeta(m)=\lambda C_8m^{r_3-2}+\lambda C_7m^{-1}+C_6m^{2_s^*-2},$$

容易得到$\lim\limits_{m\to\infty}\zeta(m)=\lim\limits_{m\to+\infty}\zeta(m)=+\infty$。令 $\zeta'(m)=0$，则

$$\lambda(r_3-2)C_8m^{r_3-3}-\lambda C_7m^{-2}+C_6(2_s^*-2)m^{2_s^*-3}=0$$

令

$$\eta(m)=\lambda(r_3-2)C_8m^{r_3-1}-\lambda C_7+C_6(2_s^*-2)m^{2_s^*-1}\tag{12}$$

则 $\zeta'(m)=m^{-2}\eta(m)$。因为 $r_3<2<2_s^*$，所以存在 m_0 使得当 $m\in(0,m_0)$时，有 $\eta(m)<0$ 且当 $m\in(m_0,+\infty)$时，有 $\eta(m)>0$。从而，$\zeta(m)$有一个唯一的最小值

$$\begin{aligned}\zeta(m_0)&=\lambda C_8m_0^{r_3-2}+\lambda C_7m_0^{-1}+C_6m_0^{2_s^*-2}\\&=\lambda C_8m_0^{r_3-2}+\lambda C_9m_0^{-1},\end{aligned}$$

式中：C_9 是常数。存在 $\lambda^*>0$ 使得对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^*)$有 $\zeta(m_0)<\dfrac{1}{8}$。进一步，

$$\tilde{\eta}(m_1)=-\lambda C_7+C_6(2_s^*-2)m_1^{2_s^*-1}=0\tag{13}$$

容易看到 $m_0>m_1=\left[\dfrac{\lambda C_7}{C_6(2_s^*-2)}\right]^{\frac{1}{2_s^*-1}}$，因此，存在一个常数 $\gamma>0$ 使得当$|h|_2^2<\gamma$ 时，有

$$m_0^2\Big[\frac{1}{4}-\zeta(m_0)\Big]-C_\varepsilon'|h|_2^2>0,$$

式中：$\gamma=\dfrac{\left[\dfrac{\lambda C_7}{C_6(2_s^*-2)}\right]^{\frac{2}{2_s^*-1}}}{8C_\varepsilon'}$，因此，对于 $0<\lambda<\lambda^*$ 且$|h|_2^2<\gamma$，存在 $\alpha,\rho>0$ 使得 $I(u)\geqslant\alpha$ 且$\|u\|=\rho$。

2) 根据(f_3)，存在常数 C_{10},C_{11} 使得

$$F(\tau)\geqslant C_{10}\tau^v-C_{11},\ \forall\tau>0\tag{14}$$

固定任意的 $u_0>0$，得到

$$\begin{aligned}I(tu_0)=&\frac{t^2}{2}\|u_0\|_E^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u^t(tu_0)^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,tu_0)\mathrm{d}x-\\&\lambda\int_\Omega G(x,tu_0)\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)tu_0\mathrm{d}x\\\leqslant&\frac{t^2}{2}\|u_0\|_E^2+\frac{C_{12}t^4}{4}\|u_0\|_E^4-C_{10}t^v|u_0|_v^v+C_{11}|\Omega|-\\&\lambda\int_\Omega G(x,tu_0)\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)tu_0\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

式中:C_{12} 是常数。由 $v\in(4,2_s^*)$ 可得当 $t\to\infty$ 时,$I(tu_0)\to-\infty$。存在 $e\in E$ 且$\|e\|>\rho$ 使得 $I(e)<0$。

引理 2.2 若(f_1),(f_2),(f_3),(g_1)成立,那么泛函 I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件。

证明 设$\{u_n\}$是 E 上的$(\mathrm{PS})_c$ 序列,即存在 $c>0$ 使得当 $n\to\infty$ 时

$$I(u_n)\to c \text{ 且 } I'(u_n)\to 0 \tag{15}$$

从而有

$$\begin{aligned}
c(1+\|u_n\|_E)&\geqslant I(u_n)-\frac{1}{v}\langle I'(u_n),u_n\rangle\\
&=\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_{u_n}^t u_n^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x-\\
&\quad\lambda\int_\Omega G(x,u_n)\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u_n\mathrm{d}x-\\
&\quad\frac{1}{v}(\|u_n\|_E^2+\int_\Omega\phi_{u_n}^t u_n^2\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u_n)\mathrm{d}x-\\
&\quad\lambda\int_\Omega g(x,u_n)u_n\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u_n\mathrm{d}x)\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{v}\right)\|u_n\|_E^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{v}\right)\int_\Omega\phi_{u_n}^t u_n^2\mathrm{d}x+\\
&\quad\int_\Omega\left(\frac{f(x,u_n)u_n}{v}-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x+\\
&\quad\lambda\int_\Omega\left(\frac{g(x,u_n)u_n}{v}-G(x,u_n)\right)\mathrm{d}x+\\
&\quad\left(\frac{1}{v}-1\right)\int_\Omega h(x)u_n\mathrm{d}x\\
&\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{v}\right)\|u_n\|_E^2+\lambda\int_\Omega\left(\frac{g(x,u_n)u_n}{v}-G(x,u_n)\right)\mathrm{d}x+\\
&\quad\left(\frac{1}{v}-1\right)\int_\Omega h(x)u_n\mathrm{d}x\\
&\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{v}\right)\|u_n\|_E^2+C_{13}\left(\frac{1}{v}-1\right)|h|_2\|u_n\|_E-\\
&\quad C_{14}\|u_n\|_E-C_{15}\|u_n\|_E^{r_3}
\end{aligned}$$

式中:C_{13},C_{14},C_{15} 是常数。$\{u_n\}$在 E 中有界。如果有必要的话,取一个子列,仍然用$\{u_n\}$表示,那么当 $n\to\infty$ 时,存在 $u\in E$ 使得

在 E 上,u_n 弱收敛到 u;

在 $L^r(\Omega)(2\leqslant r<2_s^*)$上,$u_n$ 强收敛到 u,

在 Ω 上,u_n 几乎处处收敛到 u。

根据(f_1),(f_2),(g_1),当 $n\to\infty$ 时,有

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0,$$

$$\int_\Omega g(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0。$$

由式(15)和弱收敛得

$$\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle=o(1)。$$

由引理 1.2 得

$$\int_\Omega\phi_{u_n}^t(x)u_n(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_\Omega\phi_u^t(x)u(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$$

有

$$\begin{aligned}
&\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle\\
&=\langle I'(u_n),u_n-u\rangle-\langle I'(u),u_n-u\rangle\\
&=\langle u_n,u_n-u\rangle_E+\int_\Omega\phi_{u_n}^t(x)u_n(u_n-u)\mathrm{d}x-\\
&\quad\lambda\int_\Omega g(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x-\\
&\quad\int_\Omega h(x)(u_n-u)\mathrm{d}x-\langle u,u_n-u\rangle_E-\int_\Omega\phi_u^t(x)u(u_n-u)\mathrm{d}x+\\
&\quad\lambda\int_\Omega g(x,u)(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_\Omega f(x,u)(u_n-u)\mathrm{d}x+\\
&\quad\int_\Omega h(x)(u_n-u)\mathrm{d}x\\
&=\langle u_n-u,u_n-u\rangle_E=o(1)。
\end{aligned}$$

从而,我们得到在 E 上,u_n 强收敛到 u。

定理 1.1 的证明 根据引理 2.1,引理 2.2 和山路定理[19],得到问题(1)有一个山路解。

3 无穷多解的存在性

考虑式(1)是临界增长的情况,即

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+V(x)u+\phi(x)u=\\ f(x,u)+\lambda|u|^{2_s^*-2}u, & x\in\Omega,\\ (-\Delta)^t\phi(x)=u^2, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\mathbf{R}^3\backslash\Omega,\end{cases}\tag{16}$$

由(g_2)可知,式(16)的泛函是偶泛函,可以通过对称山路定理得到无穷多解的存在性。因为临界项的存在,所以首先证明全局紧性结论。

引理 3.1 设(f_2)成立,则对任意 $M>0$,存在 λ_* 使得对于 $\forall\lambda\in(0,\lambda_*)$,泛函 I 在$(-\infty,M]$满足 PS 条件。

证明 设$\{u_n\}$是泛函 I 在 d 水平上的 PS 序列,即存在 $d>0$ 使得当 $n\to\infty$ 时有

$$I(u_n)\to d \text{ 且 } I'(u_n)\to 0 \tag{17}$$

根据(f_2),我们有

$$|f(x,u)u|\leqslant c(\varepsilon)+\varepsilon|u|^{2_s^*} \tag{18}$$

$$|F(x,u)|\leqslant c'(\varepsilon)+\varepsilon|u|^{2_s^*} \tag{19}$$

由式(17)可得

$$d+\|u_n\|_E\geqslant I(u_n)-\frac{1}{4}\langle I'(u_n),u_n\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_{u_n}^t u_n^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x-$$

$$\frac{\lambda}{2_s^*}\int_\Omega|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}(\|u_n\|_E^2+\int_\Omega\phi_{u_n}^t u_n^2\mathrm{d}x-$$

$$\int_\Omega fu_n\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{1}{4}\|u_n\|_E^2+\lambda\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2_s^*}\right)|u_n|_{2_s^*}^{2_s^*}+$$

$$\int_\Omega(\frac{fu_n}{4}-F)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{1}{4}\|u_n\|_E^2+\left(\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{2_s^*}-\varepsilon\right)|u_n|_{2_s^*}^{2_s^*}-c(\varepsilon)|\Omega|$$

$$\geqslant\frac{1}{4}\|u_n\|_E^2-c(\varepsilon)|\Omega|,$$

$\{u_n\}$在 E 中有界。

接下来证明泛函 I 满足 PS 条件,由于$\{u_n\}$在 E 中有界,如果有必要的话,取一个子列,仍然用$\{u_n\}$表示,那么当 $n\to\infty$ 时,存在 $n\in E$ 使得

在 E 上,u_n 弱收敛到 u;

在 $L^2(\Omega)$上,u_n 强收敛到 u;

在 Ω 上,u_n 几乎处处收敛到 u。

利用(f_2),有

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\to\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x+o(1)\tag{20}$$

$$\int_\Omega F(x,u_n)u_n\mathrm{d}x\to\int_\Omega F(x,u)u\mathrm{d}x+o(1)\tag{21}$$

值得注意的是序列$\left\{\frac{u_n(x)-u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N+2s}{2}}}\right\}$在 $L^2(\Omega)$中有界,由点态收敛 $u_n\to u$ 可知,在 $L^2(\Omega)$上

$$\frac{u_n(x)-u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N+2s}{2}}}\to\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{N+2s}{2}}}\tag{22}$$

根据式(20)~式(22)和引理 1.2,得 $I'(u_n)=0$,即,u 是式(16)的弱解且

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|_E^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u^t u^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-$$

$$\frac{\lambda}{2_s^*}\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x\right)-$$

$$\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2_s^*}\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u^t u^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}uf-F\right)\mathrm{d}x+\lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_s^*}\right)\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-$$

$$\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u^t u^2\mathrm{d}x\tag{23}$$

可以验证在 E 上,u_n 强收敛到 u,由 Brézis-Lieb 引理的分数形式可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega(|u_n|^{2_s^*}-|u_n-u|^{2_s^*})\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x\tag{24}$$

$$\|u_n\|_E^2=\|u_n-u\|_E^2+\|u_n\|_E^2+o(1)\tag{25}$$

根据式(17)、式(24)和式(25),有

$$\langle I'(u_n),u_n\rangle=\|u_n\|_E^2+\int_\Omega\phi_{u_n}^t(x)u_n^2\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x-$$

$$\lambda\int_\Omega|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x$$

$$=\|u_n-u\|_E^2+\|u\|_E^2+\int_\Omega\phi_u^t(x)u^2\mathrm{d}x-$$

$$\int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega|u_n-u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-$$

$$\lambda\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x+o(1)$$

$$=o(1)$$

由于 $I'(u)=0$,则

$$\|u_n-u\|_E^2=[u_n-u]_s^2+o(1)=\lambda\int_\Omega|u_n-u|^{2_s^*}\mathrm{d}x+o(1)\tag{26}$$

不失一般性,假设$\|u_n-u\|_E^2=A+o(1)$。

如果 $A=0$,证毕。

如果 $A>0$,将证明这是不可能的。事实上,利用 S_s 的定义,有

$$A\geqslant S_s\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2_s^*}}\tag{27}$$

则 $A\geqslant S_s^{\frac{3}{2s}}\lambda^{\frac{2s-3}{2s}}$。结合式(17)~式(19)和式(23)~式(25),当 $n\to\infty$ 时,有

$$d=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_{u_n}^t u_n^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x-$$

$$\frac{\lambda}{2_s^*}\int_\Omega|u_n|^{2_s^*}\mathrm{d}x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\|u_n-u\|_E^2+\frac{1}{2}\|u\|_E^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_{u_n}^t u_n^2\mathrm{d}x-$$

$$\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2_s^*}\int_\Omega|u_n-u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-$$

$$\frac{\lambda}{2_s^*}\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{A}{2}-\frac{A}{2_s^*}+\int_\Omega\left(\frac{1}{2}uf-F\right)\mathrm{d}x+$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_s^*}\right)\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u^t u^2\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{A}{2}-\frac{A}{2_s^*}+\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2_s^*}-\varepsilon\right)|u|_{2_s^*}^{2_s^*}-c(\varepsilon)|\Omega|-$$

$$C_{19}|u|_{2_s^*}^4$$

现在,我们定义 $\varepsilon_1>0$ 且

$$\min_{\lambda>0}\left(\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2_s^*}-\varepsilon\right)|u|_{2_s^*}^{2_s^*}-c(\varepsilon)|\Omega|-C_{19}|u|_{2_s^*}^4\right)=-\varepsilon_1。$$

则对任意的 $M>0$,存在 λ_* 使得对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_*)$ 有

$$d\geqslant\frac{s}{3}S_s^{\frac{3}{2s}}S^{\frac{2s-3}{2s}}-\varepsilon_1>M$$

现在介绍 Krasnoselski 亏格。设 E 是一个 Banach 空间。A 为 E 的一个闭子集,如果 $x\in A$,有 $-x\in A$,则称 A 是对称的。用 $\sum$ 表示 E 的所有对称闭集族。A 的亏格是指使得 $\varphi\in C(A,\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ 是奇映射的最小正整数。如果 n 不存在,则 $\gamma(A)=\infty$。通常,$\gamma(\varphi)=0$。

命题 3.1 设 $A,B\in\sum$,则

1) 如果存在一个从 A 到 B 的连续奇映射,则 $\gamma(A)\leqslant\gamma(B)$。

2) 如果存在一个从 A 到 B 的同胚奇映射,则 $\gamma(A)=\gamma(B)$。

3) 如果 $\gamma(B)<\infty$,则 $\gamma(\overline{A\backslash B})\geqslant\gamma(A)-\gamma(B)$。

4) 利用 Borsuk-Ulam 定理,n 维球面 $\mathbf{S}^n$ 有一个 $n+1$ 的亏格。

5) 如果 A 是紧的,则 $\gamma(A)<\infty$ 且存在 $\delta>0$ 和一个 A 的闭的对称邻域 $N_\delta(A)=\{x\in E:\|x-A\|\leqslant\delta\}$,使得 $\gamma(N_\delta(A))=\gamma(A)$。

接下来给出 Kajikiya[20]的对称山路定理。

引理 3.2 设 E 是一个无限维的 Banach 空间且泛函 $I\in C^1(E,\mathbf{R})$ 满足下列条件:

(A_1) $I(u)$ 是偶的、下有界的,$I(0)=0$ 且 $I(u)$ 满足局部 PS 条件,即对于某些 $d^*>0$,如果 E 中的任意序列 $\{u_n\}$ 满足 $I(u_n)\to d<d^*$ 且在 E^* 上有 $I'(u_n)\to0$,则 $\{u_n\}$ 有一个收敛子列。

(A_2) 对任意的 $n\in\mathbf{N}$,存在 $A_n\in\varGamma_n$ 使得 $\sup\limits_{u\in A_n}I(u)<0$。

那么下列的 1)或者 2)成立。

1) 存在一个序列 $\{u_n\}$ 使得 $I'(u_n)=0$,$I(u_n)=0$,且 $\{u_n\}$ 收敛到 0。

2) 存在两个序列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 使得 $I'(u_n)=0$,$I(v_n)<0$,$\lim\limits_{n\to\infty}I(v_n)=0$ 且 $\{v_n\}$ 收敛到一个非零的数。

由于 $I(u)$ 不是下有界的,在下面的讨论中利用截断技巧。在式(19)中取 $\varepsilon=\frac{\lambda}{2_s^*}$,得到

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|_E^2+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u^t u^2\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-$$

$$\frac{\lambda}{2_s^*}\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_E^2-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2_s^*}\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_E^2-c\left(\frac{\lambda}{2_s^*}\right)|\Omega|-\frac{2\lambda}{2_s^*}\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_E^2-c\left(\frac{\lambda}{2_s^*}\right)|\Omega|-\frac{2\lambda}{2_s^*}S_s^{-\frac{2_s^*}{2}}\left([u]_s^2\right)^{\frac{2_s^*}{2}}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_E^2-c\left(\frac{\lambda}{2_s^*}\right)|\Omega|-\frac{2\lambda}{2_s^*}S_s^{-\frac{2_s^*}{2}}\|u\|_E^{2_s^*}$$

$$=B_1\|u\|_E^2-B_2\|u\|_E^{2_s^*}-B_3$$

式中:$B_1=\frac{1}{2}$,$B_2=\frac{2\lambda}{2_s^*}S_s^{-\frac{2_s^*}{2}}$,$B_3=\left(\frac{\lambda}{2_s^*}\right)|\Omega|$。

考虑函数

$$g(t)=B_1t^2-B_2t^{2_s^*}-B_3$$

容易验证 g 在 $t_1=\left(\frac{S_s^{\frac{2_s^*}{2}}}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}}$ 取得最大值,取

$\lambda_*'=\left[\frac{\frac{5}{3}(S_s)^{\frac{3}{2s}}2^{\frac{2s-3}{2s}}}{C|\Omega|}\right]^{\frac{2s}{3-2s}}$,那么对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_*')$ 有

$$M_1=g(t_1)=\frac{s}{3}(S_s)^{\frac{3}{2s}}(2\lambda)^{\frac{2s-3}{2s}}-c\left(\frac{\lambda}{2_s^*}\right)|\Omega|>0 \tag{28}$$

因此,可以发现对任意的 $M_0\in(0,M_1)$,$t_0<t_1$ 有 $g(t_0)=M_0$。然后引入辅助函数

$$\chi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ \dfrac{B_1t^2-B_3-M_1}{B_2t^{2_s^*}}, & t\geqslant t_1,\\ C^\infty,\chi(t)\in[0,1], & t_0\leqslant t\leqslant t_1。\end{cases}$$

容易验证$\chi(t)\in[0,1]$且$\chi(t)\in C^{\infty}$。设$\beta(u)=\chi(\|u\|)$，考虑截断泛函$J:E\to\mathbf{R}$，

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|_E^2+\frac{1}{4}\int_\Omega \phi_u^t u^2\mathrm{d}x-\beta(u)\int_\Omega F\mathrm{d}x-\frac{\lambda\beta(u)}{2_s^*}\int_\Omega |u|^{2_s^*}\mathrm{d}x \tag{29}$$

因此

$$J(u)\geqslant B_1\|u\|_E^2-B_2\beta(u)\|u\|_E^{2_s^*}-c\left(\frac{\lambda}{2_s^*}\right)|\Omega|=\bar{g}(\|u\|_E)$$

式中：$\bar{g}(t)=B_1t^2-B_2\chi(t)t^{2_s^*}-B_3$且

$$\bar{g}(t)=\begin{cases}g(t), & 0\leqslant t\leqslant t_0\\ M_1, & t\geqslant t_1\end{cases}$$

利用上述论断，有以下结论。

引理 3.3 设$J(u)$的定义为式(29)，则

1）$J\in C^1(E,\mathbf{R})$，J是偶的且下有界。

2）如果$J(u)<M_0$，则$\bar{g}(\|u_n\|_E)<M_0$，因此，$\|u_n\|_E<t_0$，且$I(u)=J(u)$。

3）存在λ_*使得对任意的$\lambda\in(0,\lambda_*)$，对于$d<M_0\in\left(0,\min\left\{M_1,\frac{s}{3}S^{\frac{3}{2s}}\lambda^{\frac{2s-3}{2s}}-\varepsilon_1\right\}\right)$，$J$满足局部PS条件。

证明 容易验证1)和2)。由于2)和引理3.1知3)。

引理 3.4 假设$(\tilde{f}_1)$成立，则对任意的$k\in\mathbf{N}$，存在$\delta(k)>0$使得$\gamma(\{u\in X:J(u)\leqslant\delta(k)\}\backslash\{0\})\geqslant k$。

证明 由$(\tilde{f}_1)$知$F(x,\varepsilon u)\geqslant G(\varepsilon)(\varepsilon u)$且当$\varepsilon\to0$时，有$G(\varepsilon)\to\infty$。给定$k\in\mathbf{N}$且设$E_k$是$E$的一个$k$维子空间。因为$E_k$中的所有范数等价，定义

$$\alpha_k=\inf_{\|u\|_E=1}\int_\Omega|u|^{2_s^*}\mathrm{d}x,\ \beta_k=\inf_{\|u\|_E=1}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x,$$

则对任意的$u\in E_k$，$\varepsilon\in(0,t_0)$，

$$\begin{aligned}I(\varepsilon u)=J(\varepsilon u)&\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\lambda\varepsilon^{2_s^*}}{2_s^*}\alpha_k-G(\varepsilon)\varepsilon^2\beta_k+C\varepsilon^4\\&\leqslant\varepsilon^2\left[\frac{1}{2}-\frac{\lambda\varepsilon^{2_s^*-2}}{2_s^*}\alpha_k-G(\varepsilon)\beta_k+C\varepsilon^2\right]\\&=-\delta(k)\end{aligned}$$

由于$G(\varepsilon)\to\infty(\varepsilon\to0)$，当给定的$\varepsilon$足够小时，有$-\delta(k)<0$。因此

$$\{u\in E_k:\|u\|_E=\varepsilon\}\subset\{u\in E:J(u)\leqslant-\delta(k)\}\backslash\{0\}$$

定理 1.2 的证明 考虑

$$\textstyle\sum_k:=\{A\in X\backslash\{0\}:A\text{ 是闭的且 }A=-A,\gamma(A)\geqslant k\}$$

且定义

$$c_k=\inf_{A\in\sum_k}\sup_{x\in A}G(u)$$

利用引理3.3可得$-\infty<c_k<0$。因此，满足引理3.2的条件(A_1)和(A_2)，继而，存在一个解序列收敛到0。从而，定理1.2由引理3.3得到。

参考文献：

[1] NEZZA E D，PALATUCCI G，VALDINOCI E. Hitchhiker′s guide to the fractional Sobolev spaces[J]. Bulletin des Sciences Mathématiques，2012，136(5)：521–573.

[2] BERTOIN J. Lévy processes[M]. Cambridge：Cambridge University Press，1996.

[3] KURIHARA S. Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films[J]. Journal of the Physical Society of Japan，1981，50(10)：3262–3267.

[4] CAFFARELLI L A，ROQUEJOFFRE J M，SIRE Y. Variational problems with free boundaries for the fractional Laplacian[J]. Journal of the European Mathematical Society，2010，12(5)：1151–1179.

[5] TANKOV P. Financial modelling with jump processes[M]. New York：Chapman and Hall/CRC，2003.

[6] CAFFARELLI L A，SALSA S，SILVESTRE L. Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian[J]. Inventiones mathematicae，2008，171(2)：425–461.

[7] SILVESTRE L. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator[D]. Austin：The University of Texas at Austin，2005.

[8] SILVESTRE L. On the differentiability of the solution to the Hamilton-Jacobi equation with critical fractional diffusion[J]. Advances in Mathematics，2011，226(2)：2020–2039.

[9] AIBERTI G，BOUCHITTE G，SEPPECHER P. Phase transition with the line-tension effect[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis，1998，144(1)：1–46.

[10] BISCI G M，RADULESCU V D，SERVADEI R. Variational methods for nonlocal fractional problems[M]. Cambridge：Cambridge University Press，2016.

[11] ZHANG J J，DO O J M，SQUASSINA M. Fractional schrodinger poisson systems with a general subcritical or critical nonlinearity[J]. Advanced Nonlinear Studies，2016，16(1)：15–30.

[12] TENG K，AGARWAL R P. Existence and concentration of

positive ground state solutions for nonlinear fractional Schrodinger–Poisson system with critical growth[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2018，41(17)：8258–8293.

[13] ZHI Z，YAN L，YANG Z. Existence and multiplicity of solutions for a fractional p–Laplacian equation with perturbation [J]. Journal of Inequalities and Applications，2021(1)：1–13.

[14] 冯胜豪，王莉，黄玲. 双临界项的分数阶薛定谔–泊松方程组非平凡解[J]. 华东交通大学学报，2021，38(6)：114–119.

FENG S H，WANG L，HUANG L. Nontrivial solution for fractional Schrödinger–Poisson type equations with double critical terms[J]. Joumal of East China Jiaotong University，2021，38(6)：114–119.

[15] CHE G，CHEN H，SHI H，et al. Existence of nontrivial solutions for fractional Schrodinger–Poisson system with sign–changing potentials[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2018，41(13)：5050–5064.

[16] SHEN L，YAO X. Least energy solutions for a class of fractional Schrodinger–Poisson systems[J]. Journal of Mathematical Physics，2018，59(8)：081501.

[17] PUCCI P，XIANG M Q，ZHANG B L. Multiple solutions for nonhomogeneous Schrodinger–Kirchhoff type equations involving the fractional–Laplacian in[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations，2015，54(3)：2785–2806.

[18] TENG K. Existence of ground state solutions for the nonlinear fractional Schrodinger–Poisson system with critical Sobolev exponent[J]. Journal of Differential Equations，2016，261(6)：3061–3106.

[19] RABINOWITZ P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations[M]. American Mathematical Society，1986.

[20] KAJIKIYA R. A critical–point theorem related to the symmetric mountain–pass lemma and its applications to elliptic equations[J]. Journal of Functional Analysis，2005，225(2)：352–370.

第一作者：钟巧澄(1996—)，硕士研究生，研究方向为偏微分方程。E–mail：1097743227@qq.com。

通信作者：王莉(1983—)，教授，博士，研究方向为偏微分方程。E–mail：wangli.423@163.com。

(责任编辑：吴海燕)