

文章编号: 1005-0523(2024)05-0048-08



基于自适应阶次边界元法的列车车轮声辐射高效计算

白栩波^{1,2}, 张献英^{1,2}, Li Yue³

(1. 同济大学道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804; 2. 同济大学上海市轨道交通结构耐久与系统安全重点实验室, 上海 201804; 3. 西门子数字化工业软件, 比利时 鲁汶 3001)

摘要:【目的】车轮是产生轮轨滚动噪声的主要噪声源之一, 对其声辐射特性的数值仿真涉及大规模声学计算。【方法】为提高车轮声辐射的计算效率, 引入了自适应阶次边界元法。通过有限元法和边界元法相结合, 以自由场中的车轮声辐射为研究对象, 采用自适应阶次边界元法计算了车轮振动辐射声功率、标准测量点的声压以及车轮声辐射指向性, 并与传统边界元法和快速多极子边界元法的计算结果及计算时间进行了对比。【结果】不同边界元法得到的声辐射结果基本一致, 而自适应阶次边界元法的计算速度约为传统边界元法的 36 倍、快速多极子边界元法的 11 倍。【结论】自适应阶次边界元法计算效率远高于其他边界元方法, 在对车轮高频声辐射的研究中具有显著优势以及良好的适用性。研究结果可为大规模声学计算提供参考。

关键词: 车轮声辐射; 大规模声学计算; 自适应阶次边界元法; 计算效率。

中图分类号: U270.16

文献标志码: A

本文引用格式: 白栩波, 张献英, Li Yue. 基于自适应阶次边界元法的列车车轮声辐射高效计算[J]. 华东交通大学学报, 2024, 41(5): 48-55.

Efficient Calculating of the Vibro-acoustic Behavior of Train Wheel Based on Boundary Element Method with Adaptive Order

Bai Xubo^{1,2}, Zhang Xianying^{1,2}, Li Yue³

(1. Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China;
2. Shanghai Key Laboratory of Rail Infrastructure Durability and System Safety, Tongji University, Shanghai 201804, China;
3. Siemens Digital Industries Software, Leuven 3001, Belgium)

Abstract: 【Objective】 Train wheel is a significant noise source in the rolling noise, and predicting its vibroacoustic behavior involves calculating the large scale acoustic problems. To improve the computational efficiency of wheel sound radiation, this paper introduces the Boundary Element Method with Adaptive Order (BEMAO). 【Method】 The sound radiation of the wheel in free space was studied by using the combination of the finite element method and the boundary element method. The BEMAO was used to calculate the sound power radiated by the wheel, the sound pressure at standard measurement point, and the directivity of the wheel acoustic radiation. Comparison was then made with the corresponding results obtained by the conventional boundary element method (CBEM) and the fast multipole boundary element method (FMBEM) as well as the computational time. 【Result】 The sound radiation obtained by three different boundary element methods are basically consistent, but the BEMAO is about 36 times faster than the CBEM, and 11 times than the FMBEM. 【Conclusion】 The calculation

收稿日期: 2024-07-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(12104341)

efficiency of the BEMAO is obviously higher than that of other boundary element methods, and remarkable advantages and good applicability are shown in studying the sound radiation from the wheel at high frequency. The outcomes of this paper can provide reference for calculations of large scale acoustic problems.

Key words: sound radiation of the wheel; large scale acoustic calculations; boundary element method with adaptive order; calculation efficiency

Citation format: BAI X B, ZHANG X Y, LI Y. Efficient calculating of the vibro-acoustic behavior of train wheel based on boundary element method with adaptive order[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2024, 41(5): 48-55.

【研究意义】轮轨滚动噪声是列车行车中的主要噪声源之一^[1],它是由轮轨表面粗糙度诱导车轮和轨道结构向多个方向的振动产生。在轮轨滚动噪声中,钢轨主导的频率域为中高频,而车轮主要在中高频域辐射噪声^[2],且车轮噪声的重要性随车速增加而增加^[3]。因此,为提出经济有效的轨道交通降噪措施,有必要对车轮这一重要噪声源的振动和声辐射特性进行研究。然而,对车轮声辐射特性的仿真分析涉及大规模声学计算问题。目前研究通常采用传统的三维边界元法^[4],需要的计算时间较长,本文所采用的自适应阶次边界元法(boundary element method with adaptive order, BEMAO)是解决此问题的一种新方法。

【研究进展】圣小珍等^[5]总结了车轮噪声预测模型的发展,这些预测模型均基于车轮声振特性,通常采用试验或者仿真方法得到。在早期研究中,车轮振动被视为刚性质量块或者弹性圆环,而车轮声辐射依据试验结果被视为自由场中的一个点声源^[6,7]。随着数值仿真方法的发展,车轮振动和声辐射预测开始变得更为准确,如Schneider采用环单元建立了车轮的振动有限元模型,然后采用瑞利积分方法计算车轮的声辐射^[8]。随后有限元法结合边界元法成为计算车轮声辐射的最主要方法,如Thompson利用车轮的轴对称性,结合2D有限元法和2D边界元法建立了车轮的振动和声辐射模型^[9]。随着计算机计算能力的进一步提升,目前一般采用3D有限元法结合3D边界元法。在预测车轮声辐射的计算中,车轮声学边界元模型通常需要满足每波长至少6个单元的工程精度要求,导致高频时计算模型较大,因此所需的计算时间较长。文永蓬在进行车轮结构振动-声辐射一体化优

化时采用关键点以及车轮模态来表征车轮辐射声功率^[10],但此方法只适用于不同廓形车轮的声辐射比较,不能得到准确的结果。圣小珍课题组开发的2.5D有限元法结合2.5D边界元法在计算效率上优于常规3D方法^[4],但在模型中仅能考虑车轮结构,若需要分析其他结构边界如车体、车轮下的钢轨对车轮声辐射的影响^[11],此方法不再适用,需要一种新的算法来提高计算效率。

【创新特色】针对传统边界元法计算车轮高频声辐射效率低的问题,本文采用了一种新的高效数值算法——自适应阶次边界元法,即BEMAO^[12-13]。该方法主要在以下两个方面对传统边界元法进行了优化:一是在间接边界元积分公式的离散化中使用高阶多项式形函数,显著减少了模型自由度;二是在系统矩阵的组装中使用多层对角快速多极近似^[14],显著减少了模型复杂度。HAMICHE^[15]等将其应用于飞机和潜艇等结构的中低频噪声辐射计算,结果表明BEMAO的计算速度至少是传统边界元法的数十倍,其他快速算法的数倍。本文将BEMAO应用于车轮高频声辐射的求解,研究BEMAO算法求解大型结构高频声辐射的计算效率和计算精度。

【关键问题】本文以自由场中车轮在单位垂向力作用下的声辐射为研究对象,对比分别采用传统边界元法(conventional boundary element method, CBEM)、快速多极子边界元法(fast multipole boundary element method, FMBEM)和BEMAO的计算结果和计算耗时,展示BEMAO的准确性和高效性。对大规模声学问题的研究需要先进的数值仿真方法,本文将为其他学者的相关研究提供一种新的思路或参考。

1 BEMAO

ATAK等^[12]对BEMAO的基本原理进行了详细说明,本文在此进行简要介绍。

1.1 非等参方法

对于三维问题,边界元法只需对结构表面进行离散化,其积分为曲面积分,在求解过程中存在两种形函数:一种是几何形函数,用于将正交点映射到曲面上,即建立一个坐标变换,将局部坐标中几何形状规则的标准单元转换为总体坐标中几何形状扭曲的实际单元;另一种是插值形函数,用于对系统的主要未知量进行插值。通常边界元方法采用的几何形函数和插值形函数相同,称为等参方法,对应的网格单元称为等参元。等参元的几何形状与未知量插值之间具有较高的匹配度,有利于保证计算精度,并且其形函数构造简单,易于实现,是目前有限元和边界元中应用最广泛的单元。

传统边界元法为等参方法,为保证计算结果达到工程精度,在进行结构网格划分时每波长至少含有6个线性单元。在频域分析中,如果只使用一个网格,即只进行一次网格划分,那么最大网格尺寸为最高频率对应波长的 $1/6$,这会导致模型在低频下过度离散,极大地增加了计算时间和计算成本;如果使用多个网格,即分频段进行网格划分,也会增加前处理的时间。另外,如果网格划分不均匀,部分单元尺寸过大导致在高频下离散不足、达不到所需精度,或者部分单元尺寸过小导致在低频下过度离散、额外增加计算时间,模型也无法进行自动修正。

为了避开以上所述的缺陷,BEMAO采用了非等参方法,对应的网格单元称为非等参元。对于非等参元的求解,几何形函数和插值形函数是分开的。在整个频域分析中,每个网格单元的几何形函数保持不变,而插值形函数的阶次根据求解频率自动调整。这种只改变单元内形函数阶次而不改变单元数量和节点位置的方法也被称为p-自适应方法。相比于传统边界元法使用的一阶或二阶形函数,BEMAO使用的高阶形函数在每个自由度上能携带更多信息,可以更高效地捕捉单元内的声压场。对于同一个声学问题,要达到相同的计算精度,BEMAO所需的模型自由度要远低于传统边界元法,从而极大地减少了计算量。

BEMAO在高频或大尺寸单元使用高阶形函数

以保证精度,在低频或小尺寸单元使用低阶形函数以保证计算效率,在每个频率处能得到一个最优的模型大小。同时,BEMAO不需要均匀的网格,不会出现传统边界元中高频离散不足、低频过度离散的问题,采用粗糙的网格就能满足整个频域分析。

1.2 高阶形函数和先验误差估计

在插值形函数的选择上,BEMAO采用由节点函数、边函数和面函数组成的分层Lobatto函数(称为勒让德函数)。Lobatto高阶形函数中包含了更低阶的形函数,这意味着使用不同阶次的相邻单元可以共存,且可以直接从高阶的系数矩阵中提取出更低阶的系数矩阵,而无需重新生成矩阵,这也减少了计算时间。Lobatto函数具有层次性和正交性,有利于系统调节,在西门子此前开发的自适应阶次有限元法(finite element method with adaptive order, FEMAO)^[15]中得到过应用。

BEMAO支持最高6阶的形函数,此时每个波长半个单元即可达到标准工程精度,无需再遵循每波长至少6个单元的传统经验法则。因此使用粗糙的网格可以解决高频问题,有效地压缩了模型大小。在实际应用中,为准确表示几何结构以及确保单元阶次的良好分布,每个声波波长建议使用1个单元。

为了快速方便地确定每个单元在每个频率下所需的形函数阶次,BEMAO采用了先验误差估计。通过各种配置实验得到单元形函数阶次表,求解时自适应规则会自动根据单元大小、求解频率、声速和所需精度扫描表中的值,来选择每个单元中合适的多项式阶次,得到模型在每个频率下的最优阶次分布。这种先验误差估计可以高效地控制实际数值误差,比后验误差估计更适合应用于工程问题。

1.3 矩阵组装加速

对于自由度数为 N 的模型,在传统边界元法中,所有网格单元之间相互作用形成的系数矩阵为满秩矩阵,在矩阵组装过程中会产生 $O(N^2)$ 的复杂度,这是传统边界元法的主要计算成本。BEMAO采用高阶形函数极大地减少了模型自由度,但在系统矩阵组装上的耗时仍是比较长的。为了加速这个过程,BEMAO吸收了快速多极子边界元的主要思想,通过中间变换和传递分解,在边界元的远场计算中,将“点对点”的直接运算转换为“点集对点集”的间接运算^[6],极大地减少了矩阵组装的复杂

度。另外,不同于FMBEM采用的远场项隐式存储和迭代求解,BEMAO采用了远场项显示存储和直接求解,这种操作与高阶形函数能够很好的配合。

2 自由场中的车轮声辐射

在车轮声辐射特性的研究中,通常假设车轮位于自由场,即位于无限大的自由空间。本文也基于此种情形来比较BEMAO,CBEM和FMBEM的计算结果和计算效率。以下所有计算均在配置为Intel(R) Xeon(R) Platinum 8383C CPU @ 2.70 GHz和RAM 1 024 GB的工作站上完成。

2.1 车轮振动

本文所用车轮为国内某高速动车车轮,其横截面如图1所示,车轮直径为0.92 m,车轴部分直径为0.2 m。

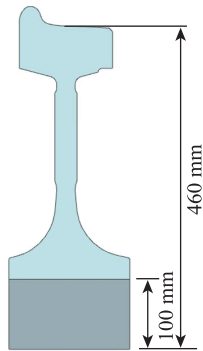


图1 车轮横截面
Fig. 1 Cross-section of the wheel

使用Simcenter 3D软件求解车轮的振动,建立的车轮有限元模型如图2所示,其中网格单元类型为CHEXA20单元(包括二十节点六面体单元和十五节点五面体单元),单元特征尺寸约为45 mm,单元数为4 268个,节点数为22 133个。本文不对车轮进行约束,只增大车轴部分的密度和弹性模量,使整

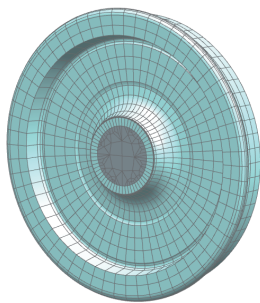


图2 车轮有限元模型
Fig. 2 Finite element model of the wheel

个车轮的质量等同于轮对质量的一半^[17],即656 kg。相比于对轮毂内边缘进行固定约束,本文在车轮的模态分析中考虑车轴和车轮的耦合,能更好地模拟节径数小于2的模态,同时可以在车轮的谐响应分析中考虑刚体模态的影响,更加接近于实际情况^[3],表1给出了车轮各部分的材料参数。

表1 车轮材料参数
Tab.1 Parameters of the wheel material

| Part of the wheel | Density /(kg / m^3) | Elastic modulus /MPa | Poisson's ratio |
|-------------------|---------------------------------------|----------------------|-----------------|
| Axle | 53 953 | 2.1×10^8 | 0.3 |
| Other parts | 7 850 | 2.1×10^5 | 0.3 |

在实际工程中,车轮受到轮轨力的作用,然而本文重点在于BEMAO的应用,且在分析车轮的速度导纳和指向性等振动和声辐射特性时,需要进行轮轨力的归一化,同时实际轮轨力下的车轮响应可由单位力下的响应与轮轨力频谱相乘得到,故本文仅考虑在轮轨接触点处施加单位垂向力。采用模态叠加法求解车轮的频率响应,求解频率设置为100~6 000 Hz,其中100~5 000 Hz的频率间隔为10 Hz,5 000~6 000 Hz的频率间隔为50 Hz,共511个频率点。使用模态叠加法时通常保留2~3倍外载荷频率范围内的所有模态,本文取12 000 Hz范围内的所有车轮模态(包括前6阶刚体模态)用于叠加,同时假定各阶模态的阻尼比均为0.005。计算得到的轮轨接触点处的速度导纳如图3所示,可见在垂向力激励下,车轮主要在垂向和横向振动,而在纵

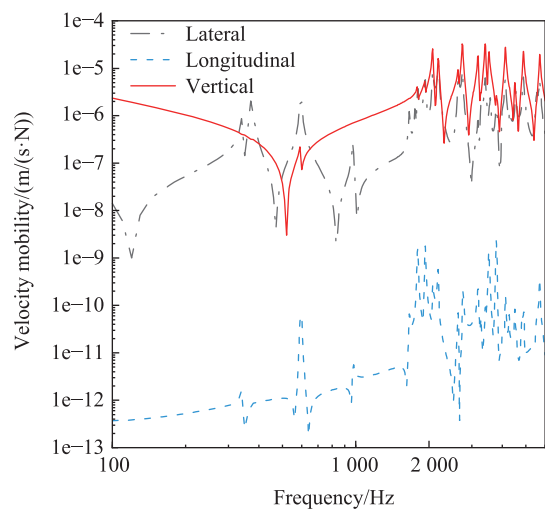


图3 轮轨接触点处的速度导纳
Fig. 3 Velocity mobility at the wheel-rail contact point

向上的振动很小,可以忽略。由于在模态叠加时考虑了刚体模态的影响,低频时车轮的速度导纳将由质量控制,在频率高于反共振点(即频率响应最低点)后速度导纳由刚度控制。图3中曲线的一系列峰值和车轮的各阶模态相对应,其中在低于2 000 Hz时主要激起车轮的轴向模态,在高于2 000 Hz时主要激起车轮的径向模态。

2.2 车轮声辐射

快速多极子边界元是迄今应用较为广泛的边界元加速算法^[16],本文将分别应用CBEM、FMBEM以及BEMAO求解车轮声辐射,对比三者的计算结果和计算时间。这3种边界元方法的基本原理^[12,16]如表2所示,其中CBEM是一种基于边界积分方程(boundary integral equation)的数值方法,且为等参方法(isoperimetric approach),而FMBEM和BEMAO是在CBEM的基础上通过优化算法发展而来的,前者主要原理为格林函数的多极子展开(multipole expansion of Green's function),后者主要为自适应高阶形函数(high order shape functions and adaptivity)、非等参方法(non-isoparametric approach)以及多层快速多极子算法(multi-level fast multipole algorithms)的应用。

表2 3种边界元方法的基本原理

Tab.2 The basic principles of three boundary element methods

| Method | Basic principles |
|--------|--|
| CBEM | Boundary integral equation + Isoperimetric approach |
| FMBEM | Multipole expansion of Green's function + Isoperimetric approach |
| | High order shape functions and adaptivity + Non- |
| BEMAO | Isoparametric approach + Multi-level fast multipole algorithms |

将有限元法计算得到的车轮表面振动响应作为速度边界条件输入边界元模型,以求解车轮声辐射。模型中空气密度为 1.21 kg/m^3 ,空气中的声速为 343 m/s 。

2.2.1 边界元模型

对于BEMAO,满足每波长至少1个单元的要求,使用的车轮网格模型如图4所示,网格类型为二次三角形和二次四边形的混合网格,网格特征尺寸为 45 mm ,单元数为3 364个,节点数为10 070个。

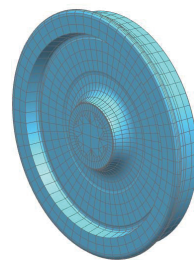


图4 BEMAO的车轮网格模型

Fig. 4 The mesh model of the wheel in BEMAO

对于CBEM和FMBEM,需要满足每波长至少6个线性网格的要求,使用的车轮网格模型如图5所示,网格类型为线性三角形网格,网格特征尺寸为 9.52 mm ,单元数为167 136个,节点数为83 570个。对3种边界元模型,分别计算车轮的辐射声功率、声压及其指向性。



图5 CBEM和FMBEM的车轮网格模型

Fig. 5 The mesh model of the wheel in CBEM and FMBEM

在Simcenter 3D软件中,结构辐射声功率是通过积分远场球面上的均方声压得到的。在与车轮中心相距 15 m 的远场建立1个包裹整个声场的球面网格。为了保证高频计算结果的准确性,此网格的特征尺寸取为 200 mm 。

依据国家标准《声学 轨道机车车辆发射噪声测量》(GB/T 5111—2011)对铁路噪声声压测量的位置规定,本文选择距离轨道中心线 7.5 m 、钢轨顶面 1.2 m 处的位置作为声压评价点。

指向性是指声辐射在特定方向上的比例,用以描述声场在空间中的分布。对于车轮声辐射指向性,本文采用如图6所示的 $1/4$ 圆弧,计算其上的声压分布。具体地,以车轮中心为圆心,半径为 6.79 m ,从 0° (对应车轮轴向)到 90° (对应车轮踏面)每 5° 设置一个声压测量点,同时此圆弧经过选定的标准测量评价点。

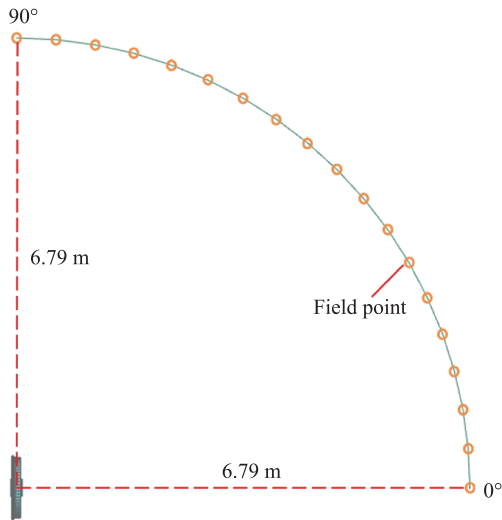


图6 辐射半径为 6.79 m 圆弧上接受点的场点位置
 Fig. 6 Sketch of the field points for the receivers at a radial distance of 6.79 m

2.2.2 结果对比

车轮声辐射计算频率的设置和 2.1 节中的车轮振动频率设置相同,并行计算设置为 6 进程和每进程 20 线程。

采用不同方法得到的单位垂向激励下车轮振动辐射声功率级如图 7 所示。由图可知, BEMAO 计算得到的结果和其他方法几乎相同, 差别大多在 0.5 dB 以内。图 7 中声功率级曲线的峰值频率和车轮振动峰值频率相对应, 在 2 000 Hz 以下时对应车轮的轴向模态, 在 2 000 Hz 以上时对应车轮的径向模态。

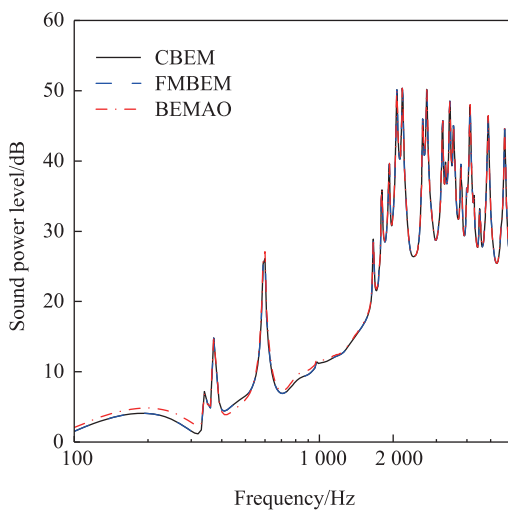


图7 车轮声辐射的声功率级
 Fig. 7 Sound power level of the wheel

相应的标准测量点处的声压级对比结果如图 8 所示。由图 8 可知, 3 种边界元方法的结果基本一致, BEMAO 和 CBEM 得到的声压级曲线吻合良好, 二者差别基本在 0.7 dB 以内。图 8 中声压级曲线的整体趋势和图 7 中的声功率级曲线是比较类似的, 只是峰值频率有所差别, 这和测量点在声场中的位置有关。

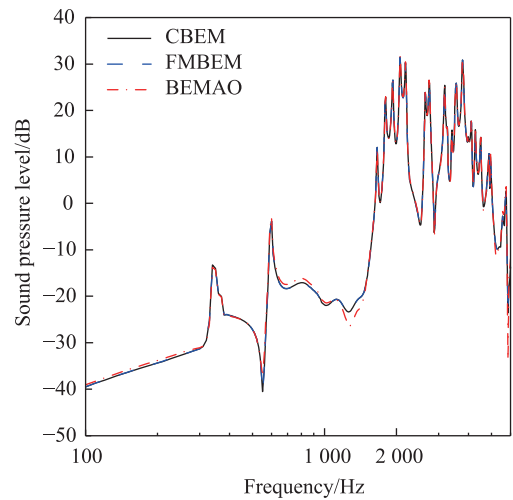


图8 标准测量点处的声压级
 Fig. 8 Sound pressure level at standard measurement point

图 9 给出了车轮在 5 节径和 3 节径 1 节圆轴向模态以及 5 节径和 3 节径径向模态上的指向性。在图 9(a)中, 3 种边界元法计算得到的结果基本一致, 各角度声压级的差别较小, 大多在 0.5 dB 以内, 如表 3 所示。图 9(b), 图 9(c)和图 9(a)的结果类似, 而在图 9(d)中, BEMAO 也仅在个别角度上(如 0°, 30°和 60°)和其他两种方法的计算结果差别大一些, 但整体吻合良好。可以看到, 两种类型的车轮模态均在 0°位置, 即车轴方向辐射的声压最小, 这是由于模态节径数大于 0, 车轮关于节径对称的部分振动方向相反, 模态振型不同区域对车轮声辐射的贡献在轴向相互抵消。从整体趋势来看, 车轮轴向模态在车轮踏面区域(90°附近)的声压级要低于车轴区域, 其声场分布类似于偶极子, 而径向模态在整个圆弧上的声压级基本处于同一水平, 其声场分布类似于单极子, 这和文献[9]得到的车轮声辐射指向性结论一致。

CBEM, FMBEM 和 BEMAO 3 种边界元方法所需要的计算时间分别为 60.4, 18.4 h 和 1.7 h, BE-

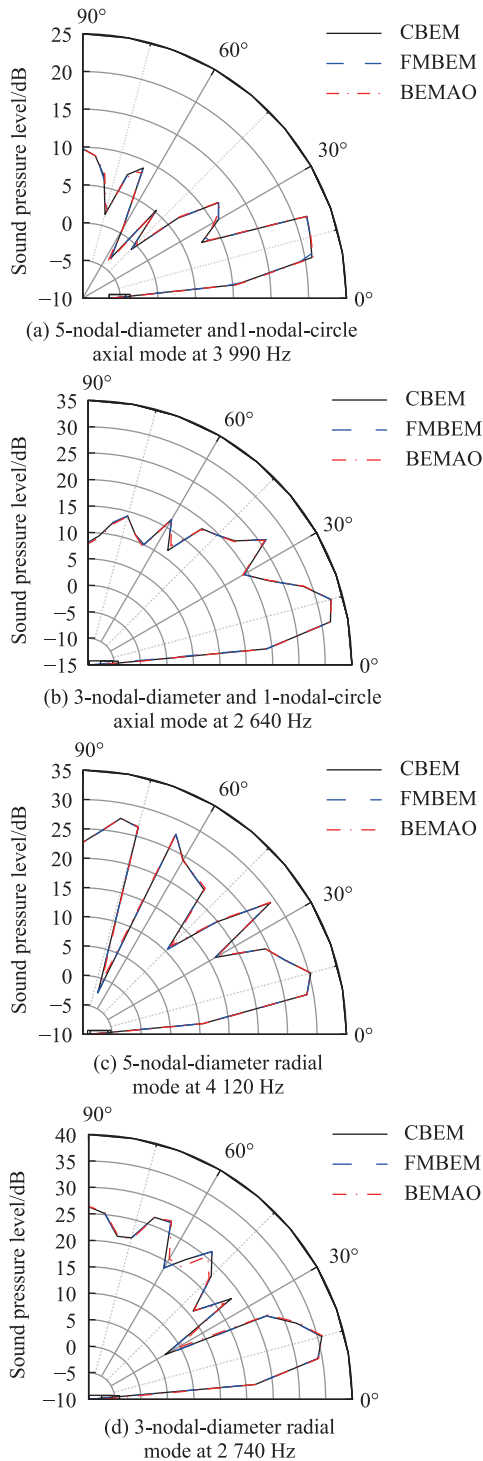


图9 车轮声辐射指向性

Fig. 9 Directivity of the wheel acoustic radiation

MAO 计算速度最快,约为CBEM的36倍、FMBEM的11倍。可见BEMAO能够显著减少大规模声学问题的求解时间,提高计算效率。

从以上对比可知,在车轮辐射声功率、标准测量点声压以及车轮声辐射指向性的求解上,BEMAO

表3 3种方法在3 990 Hz处的指向性计算结果对比

Tab.3 Comparison of the directivity calculation results of the three methods at 3 990 Hz dB

| Degree/(°) | CBEM | FMBEM | BEMAO |
|------------|------|-------|-------|
| 0 | -6.2 | -6.2 | -6.2 |
| 10 | 20.9 | 20.9 | 21.0 |
| 20 | 21.7 | 21.7 | 21.8 |
| 30 | 10.8 | 10.8 | 10.4 |
| 40 | 6.5 | 6.5 | 6.6 |
| 50 | 5.2 | 5.2 | 5.1 |
| 60 | 0.7 | 0.7 | 0.9 |
| 70 | 7.4 | 7.4 | 7.0 |
| 80 | 6.4 | 6.4 | 6.8 |
| 90 | 9.8 | 9.8 | 9.7 |

与CBEM,FMBEM的计算结果吻合良好,3种边界元方法得到的车轮声辐射特性基本一致,而BEMAO在计算效率上表现出显著优势,极大地缩短了计算时间。因此,相比于其他方法,BEMAO更适合求解车轮高频声辐射这类大规模声学计算问题,是更为高效的求解算法。另外,本文只考虑了自由场的情形,而实际工程中存在更多、更复杂的工况,例如车体边界下的车轮声辐射,此时模型计算量更大,BEMAO在计算效率上的优势将更为显著。

3 结论

本文介绍了一种新的声学边界元法——自适应阶次边界元法,并将其应用于车轮高频振动声辐射的求解,通过与传统边界元法和快速多极子边界元法的对比,得到以下结论:

1) 相比于传统边界元法,自适应阶次边界元法在算法上的优化主要为使用高阶函数降低模型自由度,以及使用快速多极近似降低系统矩阵组装的复杂度。

2) 不同边界元法得到的车轮声辐射结果基本一致,而自适应阶次边界元法的计算耗时远低于其他边界元法,能够在保证计算结果准确性的同时显著提高计算效率,在大规模声学计算方面具有明显优势。

参考文献:

- [1] THOMPSON D J, IGLESIAS E L, LIU X, et al. Recent developments in the prediction and control of aerodynamic noise from high-speed trains[J]. International Journal

- of Rail Transportation, 2015, 3(3): 119-150.
- [2] THOMPSON D J. Predictions of acoustic radiation from vibrating wheels and rails[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 120(2): 275-280.
- [3] THOMPSON D J. Railway noise and vibration: mechanisms, modelling and means of control[M]. Oxford: Elsevier, 2008.
- [4] ZHONG T S, CHEN G, SHENG X Z, et al. Vibration and sound radiation of a rotating train wheel subject to a vertical harmonic wheel-rail force[J]. *Journal of Modern Transportation*, 2018, 26(2): 81-95.
- [5] 圣小珍, 成功, THOMPSON D J, 等. 轮轨噪声预测模型研究进展[J]. *交通运输工程学报*, 2021, 21(3): 20-38.
SHENG X Z, CHENG G, THOMPSON D J, et al. Research progress on wheel-rail noise prediction models[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2021, 21(3): 20-38.
- [6] REMINGTON P J. Wheel/rail noise-part I: characterization of the wheel/rail dynamic system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, 46(3): 359-379.
- [7] REMINGTON P J. Wheel/rail noise-part IV: rolling noise [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, 46(3): 419-436.
- [8] SCHNEIDER E, POPP K, IRRETIER H. Noise generation in railway wheels due to rail-wheel contact forces [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 120(2): 227-244.
- [9] THOMPSON D J, JONES C J C. Sound radiation from a vibrating railway wheel[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 253(2): 401-419.
- [10] 文永蓬, 刘跃杰, 周月, 等. 城市轨道交通车轮结构振动-声辐射一体化优化方法[J]. *交通运输工程学报*, 2023, 23(3): 137-147.
WENG Y P, LIU Y J, ZHOU Y, et al. Integrated optimization method of vibration and sound radiation for urban rail wheel structure[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2023, 23(3): 137-147.
- [11] Zhang X Y, BAI X B, THOMPSON D, et al. Geometrical influence of structures in close proximity to a railway wheel on its sound radiation[C]//INTER-NOISE Congress and Conference Proceedings, August 20-23, 2023, Chiba: Institute of Noise Control Engineering, 268(8): 92-98.
- [12] ATAK O, LI Y, HAMICHE K, et al. BEMAO: A novel adaptive and high-order BEM solver for steady-state acoustics-part 1: theory[C]//International Conference on Noise and Vibration Engineering, September 12-14, 2022, Katholieke University Leuven. Leuven: Proceedings of ISMA2022-USD2022, 2022.
- [13] HAMICHE K, ATAK O, LI Y, et al. BEMAO: a novel adaptive and high-order BEM solver for steady-state acoustics-part 2: application, September 12-14, 2022[C]. Leuven: Katholieke Univ Leuven, Dept werktuigkunde, 2022.
- [14] LI Y, ATAK O, DESMET W. An efficient formulation of multi-level fast multipole indirect BEM for industrial acoustic problems[C]//International Conference on Noise and Vibration Engineering, September 12-14, 2022, Katholieke University Leuven. Leuven: Proceedings of ISMA2022-USD2022, 2022.
- [15] BÉRIOT H, PRINN A, GABARD G. Efficient implementation of high-order finite elements for helmholtz problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, 106(3): 213-240.
- [16] 吴海军. 基于快速多极子边界元方法的大规模声学计算方法与应用研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2013.
WU H J. Study on computational methods and applications for large scale acoustic problems based on the fast multipole boundary element method[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2013.
- [17] 圣小珍. 高速旋转车轮的高频振动[J]. *南昌工程学院学报*, 2018, 37(6): 1-13.
SHENG X Z. High frequency vibrations of train wheel in fast rotation[J]. *Journal of Nanchang Institute of Technology*, 2018, 37(6): 1-13.



第一作者:白栩波(1998—),男,硕士研究生,研究方向为结构振动与声辐射。E-mail:2131359@tongji.edu.cn。



通信作者:张献英(1985—),女,研究员,博士,博士生导师,上海海外高层次人才计划获得者,研究方向为噪声与振动控制、轨道交通动力学与声学及其控制、轨道结构状态智能检测与监测。E-mail:xianyingzhang@tongji.edu.cn。