

文章编号: 1005-0523(2025)02-0046-08



混凝土徐变柔度函数逼近的混合智能优化方法

葛 竞¹, 陈梦成^{1,2}, 谢 力¹, 黄 宏^{1,2}, 许开成^{1,2}, 方 苇^{1,2}

(1. 华东交通大学土木建筑学院, 江西 南昌 330013; 2. 华东交通大学轨道交通基础设施性能监测与保障国家重点实验室, 江西 南昌 330013)

摘要: 在混凝土结构徐变效应的有限元分析中, 徐变柔度函数通常采用 Prony 级数表征。针对传统单一方法(如共轭梯度法和 LM 法)用 Prony 级数模型拟合徐变函数试验数据时出现负数和不稳定现象而失去实际物理意义这一问题, 提出了一种新的识别 Prony 级数模型参数的混合智能优化方法: 从构造有罚项的目标优化函数出发, 结合模拟退火遗传智能算法和非线性规划方法, 约束参数物理意义进行参数识别; 在此基础上, 通过参数分析, 给出了一个简单实用的徐变函数 Prony 级数模型计算表达式。算例表明, 方法不但克服了传统方法的缺点, 而且拟合结果相对误差在 3% 以内。给出的徐变函数 Prony 级数表达式可直接应用于计算混凝土结构徐变效应的有限元软件程序开发中。

关键词: 混凝土材料; 黏弹性; 徐变函数; Prony 级数; 智能优化

中图分类号: TU528.1

文献标志码: A

本文引用格式: 葛竞, 陈梦成, 谢力, 等. 混凝土徐变柔度函数逼近的混合智能优化方法[J]. 华东交通大学学报, 2025, 42(2): 46-53.

A Hybrid Intelligent Optimization Method for Approximating the Creep Compliance Function of Concrete

Ge Jing², Chen Mengcheng^{1,2}, Xie Li², Huang Hong^{1,2}, Xu Kaicheng^{1,2}, Fang Wei^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Performance Monitoring and Protecting of Rail Transit Infrastructure, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. School of Civil Engineering & Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The creep compliance function is usually expressed by a Prony series model when using finite element codes to calculate the creep effects of concrete structures. To address the physically meaningless phenomenon of negative, oscillatory and unstable parameters when using traditional single methods (such as the conjugate gradient method and the LM algorithm) to fit Prony series models to experimental creep function data, this paper proposes a novel hybrid intelligent optimization method for Prony series parameter identification. The method establishes an objective optimization function with penalty terms and combines a simulated annealing-genetic hybrid intelligent algorithm with nonlinear programming methods to constrain parameter identification within physically meaningful ranges. Subsequently, a simple and practical calculation formulation for the Prony series was proposed by parameter analysis. It was shown by numerical examples that the proposed method not only effectively eliminates the drawbacks of conventional approaches, but also gives the identification with relative errors below

收稿日期: 2024-12-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(52278180, 51878275)

3%. The Prony expression of creep function can be directly applied to the development of finite element software program in calculating the creep effect of concrete structures.

Key words: concrete material; viscoelasticity; creep function; prony series; hybrid intelligent optimization

Citation format: GE J, CHEN M C, XIE L, et al. A hybrid intelligent optimization method for approximating the creep compliance function of concrete[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2025, 42(2): 46–53.

徐变是混凝土材料的基本特性,其在现代大型混凝土工程结构中的时变效应表现尤为显著^[1-3],对结构的力学性能与安全性有重要影响。因此精准预测混凝土结构徐变是分析结构时变应力-应变响应的关键。

根据线性黏弹性理论中 Boltzmann 叠加原理,混凝土时变应力-应变关系可以表示为以下第一类典型 Volterra 积分方程^[4]

$$\varepsilon(t) - \varepsilon^0(t) = \int_0^t J(t, \tau_0) d\sigma(\tau_0) \quad (1)$$

式中: t 为混凝土龄期, $d; \tau_0$ 为加载龄期, $d; \sigma$ 为混凝土应力, MPa; ε 为混凝土应变; $J(t, \tau_0)$ 为混凝土徐变函数或徐变柔量; ε^0 为与应力无关的非弹性收缩应变或温度应变。对式(1)进行积分计算时,需要将徐变函数试验值拟合为线性黏弹性数学模型。

求解混凝土结构徐变效应时,为提升数值积分计算效率, Bažant^[4]使用了 Prony 级数表达形式,这一形式现也被广泛应用于 Abaqus 和 Comsol 等商用有限元软件^[5-8]。求解之前,精准有效识别 Prony 级数模型参数是关键所在。目前国内外有很多确定 Prony 级数模型参数的研究报道,方法主要有预平顺法,最小二乘法,共轭梯度法,连续延迟谱法和优化法等^[4,6,9-14]。然而, Prony 级数模型在徐变函数表征中存在若干理论局限性。首先,其指数型基函数因固有频带局限性,对试验数据的离散特征表现出较高敏感性。而且,模型参数具有非唯一性特征,不同参数组合均可实现对徐变试验值的拟合。尽管徐变弹性模量在整体上为正且单调递增,但由于多解性的影响,其在某些时段的具体参数值可能出现负值或振荡现象,这与其物理意义相悖。另外,传统参数识别方法(包括共轭梯度法和 LM 法)存在对初始值差异较敏感的问题。

本文提出了一种新的 Prony 级数模型参数识别的智能优化方法。其基本原理是以最小二乘准则

为数学基础,建立目标优化函数,使徐变函数试验数据值与 Prony 级数理论模型计算值之差平方和极小化。建立了模拟退火-遗传混合优化策略(SAGA)与非线性约束规划协同的 Prony 级数模型参数识别机制。相较于传统共轭梯度法和 LM 法,本文方法能够有效克服延迟强度识别结果出现负数和不稳定的问题,而且识别收敛快、精度高,可用于现有有限元商用软件二次开发,进而计算分析混凝土结构徐变效应。

1 基本概念和数学公式

1.1 线性黏弹性本构关系与 Prony 级数

当应变为小应变且不出现逆应变和循环应变时,混凝土材料可以近似为线性黏弹性材料,其力学响应遵循叠加原理。基于此理论框架,单轴时变混凝土体系的本构描述可通过式(1)的积分方程实现。这个积分方程具有 Stieltjes 积分含义,允许用有限个阶段应力描述分段连续应力过程。当混凝土应力 $\sigma(\tau)$ 全过程已知,应变可以直接从方程(1)计算得到。然而,方程(1)不大适合一般数值计算,因为时间通常离散为有限个增量 Δt_n ,最终形成一个有关 $\Delta \sigma_n$ 和 $\Delta \varepsilon_n$ 的准静态结构分析本构方程。每计算一步应力 $\Delta \sigma_n$,对前 $n-1$ 步 $\Delta \sigma$ 进行求和、存储,需要大量的计算机存储空间和 CPU 运行时间。

为了解决上面问题, Bažant^[4]针对老化混凝土,提出了用 Prony 级数表达式拟合模拟方程(1)中的徐变函数 $J(t, \tau_0)$,具体表达式如下

$$J^{\text{Prony}}(t, \tau_0) = E_0^{-1}(\tau_0) + \sum_{\mu=1}^{N_{\mu}} E_{\mu}^{-1}(\tau_0) \left(1 - e^{-(t-\tau_0)/\tau_{\mu}}\right) \quad (2)$$

式中: $E_0^{-1}(\tau_0)$, $E_{\mu}^{-1}(\tau_0)$ 和 τ_{μ} 分别为玻璃态柔量、延迟强度和延迟时间;玻璃态柔量为瞬态柔量,即: $E_0^{-1}(\tau_0) = \lim_{t \rightarrow \tau_0} J(t, \tau_0)$ 。表达式(2)与如图1所示的广义 Kelvin 链模型的力学模型相关联。

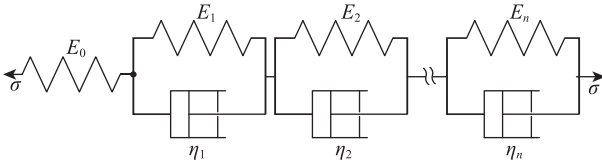


图1 混凝土徐变函数广义 Kelvin 模型

Fig. 1 Generalized Kelvin model of concrete creep function

Prony 级数的重要优势是能够描述黏弹性材料宽带现象,且因其基函数为指数函数可有效提升计算效率。将式(2)代入方程(1),得到基于广义 Kelvin 链模型的应力-应变本构方程,即

$$\varepsilon(t) - \varepsilon^0(t) = \int_0^t \left[E_0^{-1}(\tau_0) + \sum_{\mu} E_{\mu}^{-1}(\tau_{\mu}) \right] d\sigma(\tau_0) - \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu}(t) \quad (3)$$

其中

$$\varepsilon_{\mu}(t) = e^{-t/\tau_{\mu}} \cdot \int_0^t e^{\tau_0/\tau_{\mu}} E_{\mu}^{-1}(\tau_0) d\sigma(\tau_0), \quad \mu = 1, 2, \dots, N_{\mu} \quad (4)$$

式(4)可以看作式(3)的内变量,描绘 Kelvin 元件当前时刻之前的应变变化过程。

1.2 模型参数识别优化目标函数

假定徐变函数试验测试点值或预平滑试验曲线上点值用 $J^{\text{Test}}(t_r, \tau_0)$, $r = 1, 2, \dots, N_t$ 表示,那么根据最小二乘准则,在加载龄期 τ_{0m} , $m = 1, 2, \dots, N_{\tau_0}$ 选定的情况下,与试验值等效的理论曲线模型 Prony 级数表达式(2)中的系数 $E_{\mu}^{-1}(\tau_0)$ (注意: $E_0^{-1}(\tau_0)$ 没有计入), $\mu = 1, 2, \dots, N_{\mu}$, 可以使用以下最小化标量函数表达式进行识别优化

$$\begin{aligned} F(E_{\mu}, \omega_i) = & \sum_{m=1}^{N_{\tau_0}} \sum_{\mu=1}^{N_{\mu}} \sum_{r=1}^{N_t} \left[J^{\text{Prony}}(t_r, \tau_{0m}) - J^{\text{Test}}(t_r, \tau_{0m}) \right]^2 + \\ & \omega_1 \sum_{m=1}^{N_{\tau_0}} \sum_{\mu=1}^{N_{\mu}-1} \left[E_{\mu+1}^{-1}(\tau_{0m}) - E_{\mu}^{-1}(\tau_{0m}) \right]^2 + \\ & \omega_2 \sum_{m=1}^{N_{\tau_0}} \sum_{\mu=1}^{N_{\mu}-2} \left[E_{\mu+2}^{-1}(\tau_{0m}) - 2E_{\mu+1}^{-1}(\tau_{0m}) + E_{\mu}^{-1}(\tau_{0m}) \right]^2 + \\ & \omega_3 \sum_{m=1}^{N_{\tau_0}} \sum_{\mu=1}^{N_{\mu}-3} \left[E_{\mu+3}^{-1}(\tau_{0m}) - 3E_{\mu+2}^{-1}(\tau_{0m}) + 3E_{\mu+1}^{-1}(\tau_{0m}) - E_{\mu}^{-1}(\tau_{0m}) \right]^2 \end{aligned} \quad (5)$$

式中第2项~第4项代表罚函数,起到光滑数据的作用,目的是使 $E_1^{-1}(\tau_{0m})$, $E_2^{-1}(\tau_{0m})$, $\dots$, $E_{N_{\mu}}^{-1}(\tau_{0m})$ 之间差平方最小,同时降低 E_{μ}^{-1} 对拟合数据离散性的敏感度。 ω_1 , ω_2 和 ω_3 取值不应该过大,应该尽量小,一

般小于1,可以预先给定(取决于计算经验,本文取 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.0001$),也可作为参数优化识别。

2 模型参数智能优化识别基本思想

2.1 基础工作准备

2.1.1 延迟时间均匀化离散点选择

在固定加载龄期 τ_{0m} 条件下,基于 Prony 级数 $J^{\text{Prony}}(t, \tau_0)$ 识别模型参数(材料参数) $E_{\mu}^{-1}(\tau_0)$, 或者拟合给定的试验数据 $J^{\text{Test}}(t, \tau_0)$ 时,存在数学层面的困难。其根本原因是 Prony 级数系数 $E_{\mu}^{-1}(\tau_0)$ 和 τ_{μ} 之间的依存关系不稳定,完全依赖于给定的拟合数据。若直接从试验数据确定延迟时间 τ_{μ} , 将因 τ_{μ} 的多解性(不同的 τ_{μ} 解均可等效逼近试验数据曲线)导致 Prony 级数模型参数求解方程呈现高度病态。理论分析表明,混凝土徐变函数延迟时间谱完全可以用离散化方法进行表征,而这些离散值对应着不同的时间细分。因此,需预先构建松弛时间谱的优选策略。实际上,在时间对数尺度上均匀选择 $\tau_1, \dots, \tau_{N_{\mu}}$ 值最佳。根据 Bažant^[4] 计算经验,在延迟时间对数轴上按以下方式均匀选定 τ_{μ} 值,足以保证参数识别的计算精度

$$\tau_{\mu} = \tau_1 \cdot 10^{\mu-1}, \quad \mu = 1, 2, \dots, N_{\mu} \quad (6)$$

其中, τ_1 取值应该和时间对数 $\log(t - \tau_0)$ 轴上混凝土徐变函数曲线开始出现上升的时间点或者研究所需的延迟时间谱下限保持一致,而 $\tau_{N_{\mu}}$ 取值则应与时间对数 $\log(t - \tau_0)$ 轴上徐变函数曲线开始出现下降的时间点或者研究所需的延迟时间谱上限保持一致。

2.1.2 计算时间均匀化离散点确定

同样,在计算时间对数 $\log(t - \tau_0)$ 轴上对时间进行均匀离散,为 t_r , $r = 1, 2, \dots, N_t$, 每10年中有4个值为最佳选择,即 $(t - \tau_0)_r = 10^{1/4}(t - \tau_0)_{r-1}$, 为提高计算结果精度,按以下形式取值

$$(t - \tau_0)_r = 10^{1/8}(t - \tau_0)_{r-1} \quad (7)$$

需要说明的是,试验测试值通常不可能按式(7)均匀分布,必须内插使其在 $(t - \tau_0)$ 内均匀分布。

2.2 基本方程

将式(6)和式(7)代入式(5), Prony 级数模型参数 $E_1^{-1}(\tau_{0m})$, $E_2^{-1}(\tau_{0m})$, $\dots$, $E_{N_{\mu}}^{-1}(\tau_{0m})$ 的识别问题转化为求解下面标准优化问题

$$\begin{cases} \text{Find } x = \{E_{\mu}^{-1}(\tau_{0m}), \omega_i\}, \mu = 1, 2, \dots, N_{\mu}; i = 1, 2, 3 \\ \text{Minimize } F(x): \mathbb{R}^{N_{\mu}+3} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Constraints } \begin{cases} 0 < E_{\mu}^{-1}(\tau_{0m}) \leq E_{\mu}^{-1}(\tau_{0m})^{\text{upp}}, \mu = 1, 2, \dots, N_{\mu} \\ 0 < \omega_i \leq 1, i = 1, 2, 3 \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

式中: x 为设计变量; $E_{\mu}^{-1}(\tau_{0m})^{\text{upp}}$ 为任意选定值, 代表设计变量 $E_{\mu}^{-1}(\tau_{0m})$ 的上界。

2.3 MATLAB 程序实现

为解决 Prony 级数模型参数智能优化识别问题, 基于式(8), 给出了智能优化过程 Matlab 软件程序设计计算结构框架流程图(图2)。首先依据

2.1.2 中给出的混凝土持荷时间均匀化理论, 对徐变函数试验数据在时间离散节点进行采样; 其次根据模拟退火遗传算法 SAGA 程序输入参数要求输入采样点值, 以徐变函数采样点数据值与徐变函数 Prony 级数理论模型计算值之差的平方的和最小为优化目标函数, 计算得到局部最优解; 然后, 在同一目标下, 以该局部最优解作为初始值, 输入有约束非线性规划方法设计程序进行计算, 得到全局最优解; 最后, 输出求解结果。在参数识别优化过程中, 使用了 SAGA 程序自编 Matlab 程序, 结合 Matlab 软件中有约束非线性规划算法的函数“fmincon”命令。

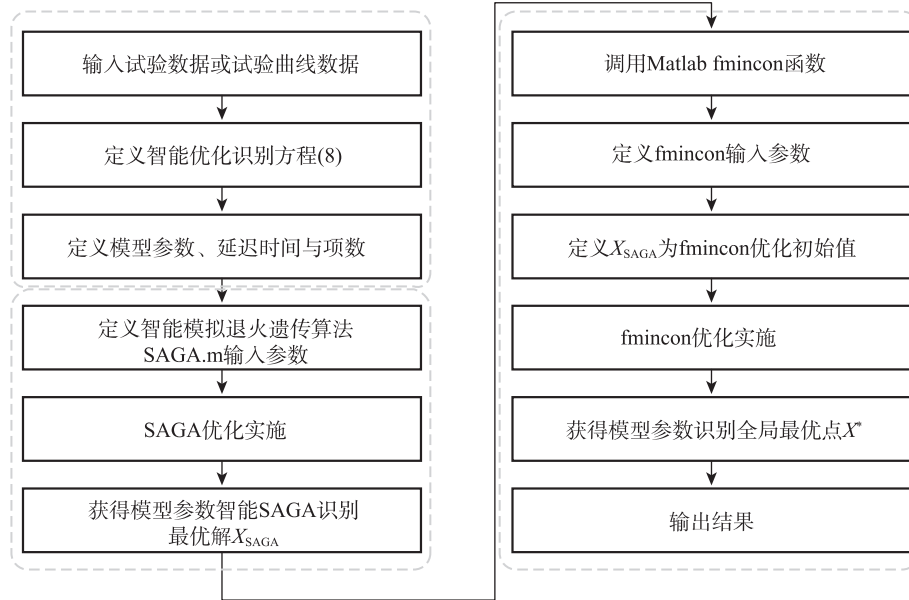


图2 模型参数智能优化识别过程 Matlab 程序计算框架流程

Fig. 2 Flowchart of programming on Matlab software of computational structure for intelligent optimization identification of model parameter

3 应用实例与计算分析

3.1 徐变函数试验数据

为阐述本文方法, 徐变函数试验数据采用 Bažant 等提出的混凝土徐变收缩预测 B3 模型^[15]进行计算。具体表达式为

$$J^{\text{B3}}(t, \tau_0) = q_1 + C_0(t, \tau_0) + C_d(t, \tau_0, t_{\text{sh}}) \quad (9)$$

式中: t 为混凝土的龄期, d ; τ_0 为加载龄期, d ; t_{sh} 为混凝土干燥开始的龄期, d ; q_1 为单位应力下产生的瞬时应变; $C_0(t, \tau_0)$ 为基本徐变度; $C_d(t, \tau_0, t_{\text{sh}})$ 为干燥徐变度, 相关项具体计算式及徐变函数试验数据

计算中采用的混凝土参数参考文献[15]。 q_1 , $C_0(t, \tau_0)$ 的表达式如下

$$q_1 = 0.6 \times 10^6 / E_{28}, E_{28} = 4734 \sqrt{f_c} \quad (10)$$

$$C_0(t, \tau_0) = q_2 Q(t, \tau_0) + q_3 \ln[1 + (t - \tau_0)^{0.1}] + q_4 \ln(t / \tau_0) \quad (11)$$

式(11)基本徐变度的 Prony 级数模型, 可以通过参数智能优化识别写成如下形式

$$C_0(t, \tau_0) = \sum_{\mu=1}^n E_{\mu}^{-1}(\tau_0) \cdot (1 - e^{-(t-\tau_0)/\tau_{\mu}}) \quad (12)$$

其中,

$$E_{\mu}^{-1}(\tau_0) = [q_2 E_{A,\mu}^{-1}(\tau_0) + q_3 E_{B,\mu}^{-1} + q_4 E_{C,\mu}^{-1}(\tau_0)] \quad (13)$$

3.2 智能优化识别过程输入参数

智能优化识别中常见的输入参数见表1。在数值识别过程中,式(12)中Prony级数的模型项数 N_μ 选为7项,各项对应的延迟时间 τ_μ 按式(6)方式选取,见表2;计算时间选定方式按式(7)进行。

表1 优化过程使用的输入参数表

Tab.1 Input parameters used in optimization process

描述	参数	取值
SAGA-种群数	$Sizepop$	100
SAGA-世代数	$Maxgen$	1 000
SAGA-交叉概率	P_c	0.8
SAGA-变异概率	P_m	0.04
SAGA-冷却系数	q	1
SAGA-初始温度	T_0	1 000
SAGA-终止温度	T_{end}	1
NPL-函数计算最大次数	$MaxFunEvals$	3 000
NPL-最大迭代数	$MaxIter$	1 000
NPL-函数精度	$TolFun$	$1 \times e-6$
NPL-算法	$Algorithm$	interior-point
Prony级数系数	E_μ^{-1}	$E_\mu^{-1} > 0$

表2 延迟时间 τ_μ 取值

Tab.2 Values of retardation time τ_μ

延迟时间/d	$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=3$	$\mu=4$	$\mu=5$	$\mu=6$	$\mu=7$
τ_μ	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3

3.3 Prony级数模型参数识别结果分析讨论

3.3.1 不同识别方法结果比较

分别使用共轭梯度法、LM法、无罚项和有罚项智能识别优化法对Prony级数模型参数延迟强度进行拟合,识别对象为加载龄期为28 d时B3模型基本徐变度中延迟强度第3部分 $E_{c,\mu}^{-1}(28)$ (见式(13)),具体模拟结果见表3。从相关系数来看,4种方法拟合精度都不错,但延迟时间较小($0 < \tau_\mu \leq 1$)时,前两种方法识别结果出现负数,失去物理意义,说明智能识别优化法优于这两种方法。这一结论可从表4得到进一步证实,表4是拟合徐变函数试验实测数据^[16]得到的识别结果。在实际数值拟合过程中,当识别参数给定初始值相同时,共轭梯度法和LM法识别结果稳定,但当给定初始值不同时,两种方法识别结果变得不稳定。智能识别优化法

表3 基于B3模型的延迟强度 $E_{c,\mu}^{-1}(28)$ 用不同拟合方法识别结果比较

Tab.3 Comparison of identified retardation strength $E_{c,\mu}^{-1}(28)$ based on B3 model by different fitting methods

延迟时间 (τ_μ)/d	取值	延迟强度(E_μ^{-1})	共轭梯度法 /(MPa $^{-1}$)	LM法/(MPa $^{-1}$)	SAGA+fmincon 无罚项/(MPa $^{-1}$)	SAGA+fmincon 有罚项/(MPa $^{-1}$)
τ_1	10^{-3}	$E_{c,1}^{-1}$	-0.017 894 84	-0.012 886 11	0.000 000 07	0.000 000 16
τ_2	10^{-2}	$E_{c,2}^{-1}$	-0.018 169 83	-0.012 920 07	0.000 000 07	0.000 000 17
τ_3	10^{-1}	$E_{c,3}^{-1}$	0.040 574 97	0.041 889 81	0.000 000 07	0.000 000 16
τ_4	10^0	$E_{c,4}^{-1}$	-0.036 469 66	-0.050 230 97	0.000 000 09	0.000 000 17
τ_5	10^1	$E_{c,5}^{-1}$	0.287 813 45	0.280 424 91	0.227 194 77	0.273 780 04
τ_6	10^2	$E_{c,6}^{-1}$	1.565 387 54	1.576 900 96	1.606 619 40	1.512 137 74
τ_7	10^3	$E_{c,7}^{-1}$	2.808 440 23	2.817 206 36	2.798 110 14	2.884 303 88
相关系数			0.999 943	0.999 952	0.999 933	0.999 902

表4 基于加载龄期14天徐变函数实测数据用不同拟合方法识别延迟强度 $E_\mu^{-1}(14)$ 结果比较

Tab.4 Comparison of identified retardation strengths $E_\mu^{-1}(14)$ based on creep test data by different fitting methods at 14 d of loading age

延迟时间 (τ_μ)/d	取值	延迟强度(E_μ^{-1})	共轭梯度法 /(MPa $^{-1}$)	LM法 /(MPa $^{-1}$)	SAGA+fmincon 无罚项/(MPa $^{-1}$)	SAGA+fmincon 有罚项/(MPa $^{-1}$)
τ_1	10^{-3}	E_1^{-1}	-0.558 645 44	-0.558 829 75	0.000 000 32	0.000 001 56
τ_2	10^{-2}	E_2^{-1}	-0.558 645 44	-0.558 829 75	0.000 000 32	0.000 001 56
τ_3	10^{-1}	E_3^{-1}	-0.558 645 44	-0.558 829 75	0.000 000 32	0.000 001 56
τ_4	10^0	E_4^{-1}	-0.558 609 99	-0.558 778 05	0.000 000 32	0.000 001 56
τ_5	10^1	E_5^{-1}	3.109 616 91	3.110 586 80	0.411 301 54	0.415 234 02
τ_6	10^2	E_6^{-1}	0.851 894 24	0.851 147 51	1.827 182 83	1.816 310 18
τ_7	10^3	E_7^{-1}	1.641 173 04	1.642 974 38	0.000 021 63	0.021 589 19
相关系数			0.999 943	0.999 952	0.999 932	0.999 902

识别结果基本稳定,有罚项智能识别优化稳定性更佳。

3.3.2 Prony级数模型参数加载龄期谱

从3.3.1分析可知,有罚项智能识别优化方法识别结果最优。因此,基于该方法计算7个模型参数延迟强度 $E_1^{-1}(\tau_0), \dots, E_7^{-1}(\tau_0)$ 随加载龄期的变化规律,并使用以下3种不同模拟方法对这些规律进行模拟。具体模拟结果讨论如下

1) 幂函数

$$E_{\mu}^{-1}(\tau_0) = x_{1\mu} + x_{2\mu} \tau_0^{-x_{3\mu}} \quad (14)$$

图3给出了7个模型参数延迟强度随加载龄期变化规律的幂函数拟合结果与优化识别计算结果比较。从图中拟合效果来看,前5个模型参数几乎完全吻合,后2个模型参数则出现些许误差。

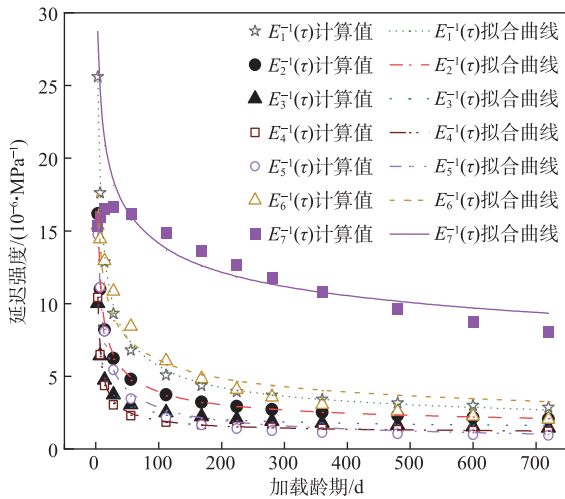


图3 模型参数延迟强度随加载龄期变化曲线(幂函数法)
Fig. 3 The variation curve of retardation strength with loading age (power function method)

2) 指数函数

$$E_{\mu}^{-1}(\tau_0) = x_{1\mu} + x_{2\mu} e^{-x_{3\mu} \tau_0} \quad (15)$$

用指数函数模拟的加载龄期对7个模型参数延迟强度的影响规律与用有罚项智能识别优化法计算的结果对比结果,如图4所示。从图4可以看出,指数函数法的拟合效果正好与幂函数法相反,即用指数法的计算结果,前5个模型参数与优化识别计算结果之间存在些许差别,后2个模型参数则几乎完全一致。

3) 幂函数与指数函数混合函数法

为发扬幂函数法和指数函数法的优点,克服它

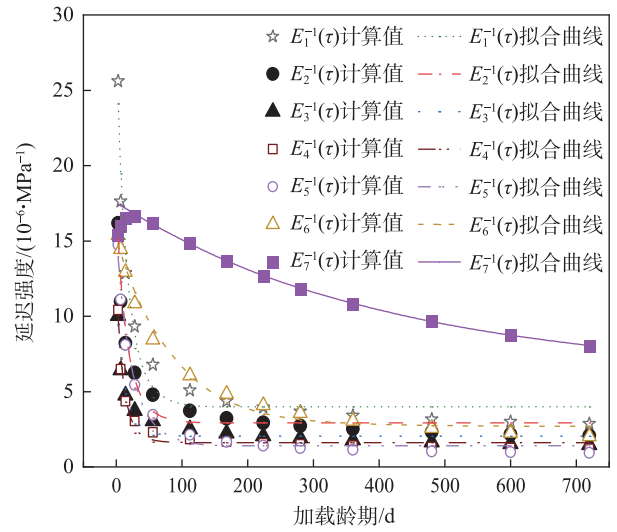


图4 模型参数延迟强度随加载龄期变化曲线(指数函数法)

Fig. 4 The variation curve of retardation strength with loading age (exponential function)

们的缺点,前5个模型参数用幂函数、后2个模型参数用指数函数的混合拟合方法分析7个模型参数延迟强度随加载龄期变化的规律。具体计算结果如图5所示。从图5比较可以看出,幂函数和指数函数混合拟合效果最好,两者结果吻合得非常好。

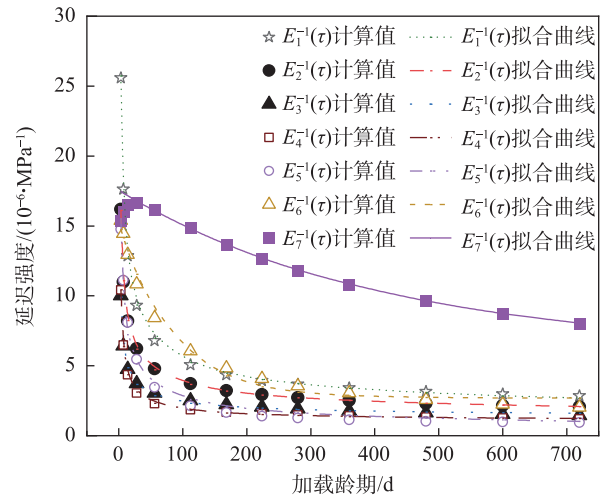


图5 模型参数延迟强度随加载龄期变化曲线(混合函数法)

Fig. 5 The variation curve of retardation strength with loading age (hybrid function method)

用幂函数和指数函数混合拟合计算得到的模型参数延迟强度的表达式如下

$$\begin{cases} E_1^{-1}(\tau_0) = 0.9558 + 42.1731 \times \tau_0^{-0.4843} \\ E_2^{-1}(\tau_0) = 0.9929 + 25.6005 \times \tau_0^{-0.4784} \\ E_3^{-1}(\tau_0) = 1.2025 + 16.1683 \times \tau_0^{-0.5628} \\ E_4^{-1}(\tau_0) = 0.9919 + 19.6592 \times \tau_0^{-0.6664} \\ E_5^{-1}(\tau_0) = 0.0002 + 26.7311 \times \tau_0^{-0.4956} \\ E_6^{-1}(\tau_0) = 2.6986 + 12.4966 \times e^{-0.0122\tau_0} \\ E_7^{-1}(\tau_0) = 6.1210 + 11.4241 \times e^{-0.0025\tau_0} \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)代入式(12),即可得到基本徐变度函数。这个基本徐变度函数很容易通过开发标准接口模块实现与主流商业有限元软件的无缝对接,从而提高混凝土结构徐变效应计算分析效率。

综上所述,用指数函数法模拟徐变函数 Prony 级数模型中延迟强度参数效果最差,幂函数法稍好,幂函数和指数函数混合法最佳。

3.3.3 B3模型验证

基于3种模型参数延迟强度拟合方法,图6给出了本模型在28 d加载龄期条件下14个不同持荷时间点的徐变函数计算值与B3模型的理论计算结果对比。对比分析表明:用指数函数法拟合延迟强度加载龄期谱,计算得到的徐变柔量函数值呈现较大偏差,与B3模型预测的徐变函数值相比低估7%左右,这可能是指数函数模拟延迟强度加载龄期谱效果差所致;用幂函数拟合延迟强度加载龄期谱,计算得到的徐变柔量函数值,仍有小幅低估,相对误差在3%以内;幂函数与指数函数混合函数法表现出最

佳拟合效果,计算得到的徐变柔量函数值与B3模型预测值具有良好一致性,相对误差在1%以内。

4 结论

本文提出了一种用Prony级数理论模型逼近徐变函数试验数据的有罚项混合智能优化方法(SA-GA+NLP),并编制了相应的Matlab程序。通过研究分析和讨论,得出以下结论。

1) 通过与B3模型理论计算结果及徐变函数试验数据对比验证表明,相较于共轭梯度法、LM法,本文提出的含罚项混合智能优化方法具有显著优势:仅需简单参数输入即可实现计算,无需复杂非线性运算及初始值设定,有效解决了延迟强度识别结果出现负数和不稳定现象的问题,而且收敛速度快、准确、有效、可行。

2) 本文提出的延迟强度加载龄期谱徐变函数 Prony 级数模型,基于幂-指数函数混合表达,相较于单一幂函数或指数函数的表达,对混凝土徐变函数的预测精度误差在1%以内。其数学表征形式在混凝土结构徐变效应计算分析中,良好适用 Abaqus, Ansys, Comsol 等主流有限元分析平台的二次开发需求。能够有效节省计算机存储空间和提高计算效率。

参考文献:

- [1] CHEN Z M, GAO F, HU J Y, et al. Creep and shrinkage monitoring and modelling of CFST columns in a super high-rise under-construction building[J]. Journal of Building Engineering, 2023, 76: 107282.
- [2] 许开成, 黄凌娟, 李鹏清, 等. 基于缩尺模型的高铁桥梁预应力损失试验研究[J]. 华东交通大学学报, 2024, 41(2): 48-55.
XU K C, HUANG L J, LI P Q, et al. Experimental study on prestress loss of high-speed railway bridges based on scaled model[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2024, 41(2): 48-55.
- [3] ZHANG H, SU C, CHEN X H, et al. Calculation of mass concrete temperature and creep stress under the influence of local air heat transfer[J]. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2024, 140(3): 2977-3000.
- [4] BAŽANT Z P, WU S T. Dirichlet series creep function for aging concrete[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1973, 99(2): 367-387.

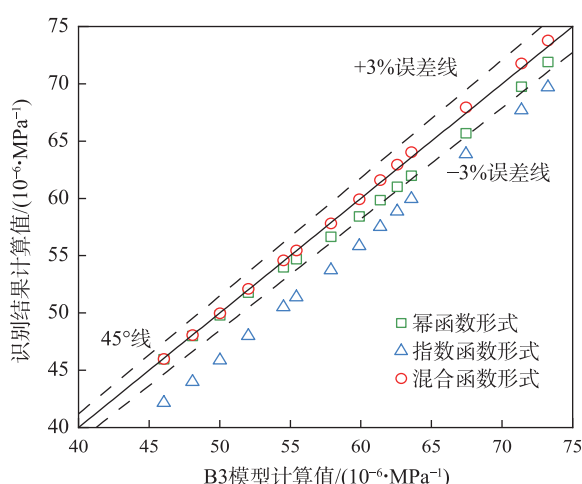


图6 不同延迟强度加载龄期谱 Prony 模型计算值与 B3 模型结果比较

Fig. 6 Comparison of the calculated value of Prony series under different retardation spectra with B3 model predictions

- [5] HRISTOV J Y. Linear viscoelastic responses: the prony decomposition naturally leads into the Caputo-Fabrizio fractional operator[J]. *Frontiers in Physics*, 2018, 6: 135.
- [6] LÓPEZ-CAMPOS J A, SEGADÉ A, CASAREJOS E, et al. Behavior characterization of viscoelastic materials for the finite element method calculation applying Prony series[J]. *Computational and Mathematical Methods*, 2019, 1(1): e1014.
- [7] XU Q W, ENGQUIST B, SOLAIMANIAN M, et al. A new nonlinear viscoelastic model and mathematical solution of solids for improving prediction accuracy[J]. *Scientific Reports*, 2020, 10(1): 2202.
- [8] DIAS F, PAULO MUÑOZ L F, ROEHL D. A numerical model for basic creep of concrete with aging and damage on beams[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 121: 185-203.
- [9] WANG Y M, SHANG L, ZHANG P P, et al. Measurement of viscoelastic properties for polymers by nanoindentation[J]. *Polymer Testing*, 2020, 83: 106353.
- [10] 黄永辉, 刘爱荣, 傅继阳. 基于PCG法的B3模式基本徐变度的Dirichlet级数拟合[J]. *广州大学学报(自然科学版)*, 2013, 12(3): 30-33.
HUANG Y H, LIU A R, FU J Y. Dirichlet progression fitting of B3 model's compliance function for basic creep based on PCG method[J]. *Journal of Guangzhou University(Natural Science Edition)*, 2013, 12(3): 30-33.
- [11] JIRÁSEK M, HAVLÁSEK P. Accurate approximations of concrete creep compliance functions based on continuous retardation spectra[J]. *Computers & Structures*, 2014, 135: 155-168.
- [12] BARRIENTOS E, PELAYO F, NORIEGA Á, et al. Optimal discrete-time Prony series fitting method for viscoelastic materials[J]. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2019, 23(2): 193-206.
- [13] 向华伟, 荣华, 范兴朗, 等. 混凝土徐变柔度函数的高效逼近方法[J]. *原子能科学技术*, 2024, 58(8): 1689-1696.
XIANG H W, RONG H, FAN X L, et al. Efficient Approximation method for concrete creep compliance function[J]. *Atomic Energy Science and Technology*, 2024, 58(8): 1689-1696.
- [14] LYU H J, YE W L, TAN Y Q, et al. Inter-conversion of the generalized kelvin and generalized maxwell model parameters via a continuous spectrum method[J]. *Construction and Building Materials*, 2022, 351: 128963.
- [15] BAŽANT Z P, BAWEJA S. Justification and refinements of model B3 for concrete creep and shrinkage 1. statistics and sensitivity[J]. *Materials and Structures*, 1995, 28(7): 415-430.
- [16] 刘成才. 大跨径钢管砼拱桥的时间、几何、温度非线性空间分析[D]. 重庆: 重庆交通学院, 2004.
LIU C C. The analysis about time, geometry, temperature to long-span concrete filled steel tubular arch bridges[D]. Chongqing: Chongqing Jiaotong University.



第一作者: 葛竞(1999—), 男, 硕士研究生, 研究方向为钢-混组合结构耐久性数值分析。E-mail: gejing1204@foxmail.com。



通信作者: 陈梦成(1962—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 研究方向为钢-混组合结构设计理论及耐久性和安全性评估。E-mail: mcchen@ecjtu.edu.cn。

(责任编辑: 李根)