

文章编号: 1005-0523(2026)02-0065-11



基于谱几何法的轨道结构全频域数值分析

吴神花^{1,2}, 雷晓燕¹

(1. 华东交通大学铁路环境振动与噪声教育部工程研究中心, 江西 南昌 330013; 2. 华东交通大学理学院, 江西 南昌 330013)

摘要:为研究轨道结构全频域振动, 基于谱几何法建立了无砟轨道结构频域振动模型。首先, 将轨道结构离散为若干个谱几何单元, 谱几何单元之间通过设置虚拟弹簧耦合; 其次, 利用 Rayleigh-Ritz 法推导出无砟轨道结构谱几何单元的特性矩阵、单元耦合刚度矩阵和荷载向量; 再采取“单元”“对号入座”法则, 将轨道结构谱几何单元特性矩阵、单元耦合刚度矩阵组集到整体轨道结构总特性矩阵中, 通过求解轨道结构的谱几何动力学方程, 得到轨道结构全频域振动响应; 最后, 采用 Matlab 编制程序, 通过与有限元法对比, 验证了谱几何法的可行性和高效率, 研究了轨道结构参数对全频域内轨道结构振动特性的影响。计算结果表明: 在 1~2 000 Hz, 谱几何法的计算速度是有限元法的 8 倍; 扣件刚度主要影响钢轨三阶自振频率; CA 砂浆刚度主要对轨道结构二阶自振频率有影响; 路基刚度主要对轨道结构一阶自振频率有影响; 扣件阻尼主要衰减轨道结构二阶、钢轨三阶自振频率对应的峰值; CA 砂浆阻尼主要衰减二阶自振频率对应的峰值; 路基阻尼主要衰减轨道结构一阶自振频率对应的峰值; 钢轨的 Pinned-Pinned 频率不受扣件刚度、CA 砂浆刚度和路基刚度的影响, 主要与钢轨扣件间距有关。研究成果可为轨道结构宽频范围内减振降噪提供高效的计算方法与技术支持。

关键词: 谱几何法; 无砟轨道结构; 全频域; 虚拟弹簧耦合

中图分类号: TB53

文献标志码: A

本文引用格式: 吴神花, 雷晓燕. 基于谱几何法的轨道结构全频域数值分析[J]. 华东交通大学学报, 2026, 43(2): 65-75.

Full Frequency Domain Numerical Analysis of Track Structure Based on Spectral Geometry Method

Wu Shenhua^{1,2}, Lei Xiaoyan¹

(1. Engineering Research Center for Railway Environmental Vibration and Noise of the Ministry of Education, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: To study the full frequency domain vibration of track structures, a frequency domain vibration model of ballastless track structures is established based on spectral geometry method. Firstly, the track structure is discretized into several spectral geometric element, which are coupled to each other by setting virtual springs. Secondly, the characteristic matrix, element coupling stiffness matrix, and load vector of the spectral geometric element of the ballastless track structure is derived by the Rayleigh-Ritz method. Adopting the principle of element matching, the spectral geometric element characteristic matrix and element coupling stiffness matrix of the track structure are combined into the overall characteristic matrix of the track structure. By solving the spectral geometric dynamic equation of the track structure, the full frequency vibration response of the track structure is obtained. Finally, a program is developed using Matlab to verify the feasibility of the spectral geometry method. By

收稿日期: 2024-11-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(52178424); 江西省自然科学基金项目(20224ACB204018, 20252BAC240222); 江西省科技专项(20223AEI91004)

comparing with the finite element method, the feasibility and high efficiency of the spectral geometry method is verified. The influence of track structure parameters on the vibration characteristics of track structures in the full frequency domain has been studied. The calculation results show that the computational speed of the spectral geometry method is 8 times faster than that of the finite element method within the frequency range of 1~2 000 Hz; fastener stiffness mainly affects the third-order natural frequency of rail; the CA mortar stiffness mainly affects the second-order natural frequency of the track structure; the subgrade stiffness mainly affects the first-order natural frequency of the track structure; the fasteners damping mainly attenuates the peak values at the second-order natural frequencies of track structures and the third-order natural frequencies of rails; the damping of CA mortar mainly attenuates the peak value at the second-order natural frequency of the track structure. The subgrade damping mainly attenuates the peak value at the first-order natural frequency of the track structure; the Pinned-Pinned frequency of rails is not affected by the stiffness of fasteners, CA mortar stiffness, and subgrade stiffness, and is mainly related to the spacing between the rail fasteners. The research results can provide efficient computational methods and technical support for vibration and noise reduction within the wide-frequency range of track structures.

Key words: spectral-geometry method; ballastless track structure; full frequency; virtual spring coupling

Citation format: WU S H, LEI X Y. Full frequency domain numerical analysis of track structure based on spectral geometry method[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2026,43(2):65-75.

轨道结构振动产生的噪声会给乘客、沿线居民带来困扰,为研究轨道结构频域振动问题,国内外学者提出了一系列数值分析方法。其中有限元法^[1-5]应用最广泛,但有限元法在求解中、高频振动响应时,网格划分比较小,计算效率会受到限制。统计能量法^[6-7]在计算高频振动噪声问题时有优势,但计算中、低频振动响应不准确,因此寻找一种高效、精确的数值分析方法来研究全频域振动问题具有科学价值。FE-SEA法^[8]是一种结合有限元法与统计能量法的优点而发展来的全频域振动分析方法,文献[8-9]采用FE-SEA法,利用VAone软件分析了2.5~500 Hz的高架轨道结构噪声。谱几何法是一种高精度、高效率的全频域数值分析方法^[10-11],该方法运用正、余弦函数级数描述结构位移,可以求解任意边界条件下的全频域梁^[12-13]、板^[14]、壳^[15]、耦合结构^[16-18]的动力学问题;由于该方法对位移场的描述是无限逼近的,在不影响计算精度的条件下,其单元尺寸可以更大,计算效率更高。但将谱几何法运用于轨道结构全频域振动特性的研究鲜见报道。因此,将该方法拓展到无砟轨道全频域振动研究具有重要的科学价值,不仅能够拓宽谱几何法的实际工程应用范围,还能为轨道结构全频域数值分析提供一种高效率、高精度的计算方法。

本文基于谱几何法构建了无砟轨道结构频域

振动模型与算法:首先,将轨道结构离散为若干个谱几何单元,谱几何单元之间通过设置虚拟弹簧耦合;其次,利用Rayleigh-Ritz法推导出无砟轨道结构谱几何单元的特性矩阵、单元耦合刚度矩阵和荷载向量;再次,采取“单元”“对号入座”法则,将轨道结构谱几何单元特性矩阵、单元耦合刚度矩阵组集到整体轨道结构总特性矩阵中,通过求解轨道结构的谱几何动力学方程,得到轨道结构全频振动响应;最后,采用Matlab编制程序,验证了谱几何法的可行性,对比了有限元法与谱几何法的计算效率,研究了轨道结构参数对全频域内轨道结构振动特性的影响。

1 基于谱几何法的轨道结构频域振动分析模型

将轨道结构离散为若干个谱几何单元,如图1所示。其中,钢轨、轨道板、底座板分别模拟为梁谱几何单元;钢轨扣件、CA砂浆和路基分别简化为离散分布、均布、均布的弹簧-阻尼。

图1中, E_r , I_r , ρ_r , S_r 分别为钢轨弹性模量、水平惯性矩、密度、截面面积; E_s , I_s , ρ_s , S_s 分别为轨道板弹性模量、水平惯性矩、密度、截面面积; E_h , I_h , ρ_h , S_h 分别为底座板弹性模量、水平惯性矩、密度、截面面积; k_{y1} , k_{y2} , k_{y3} 分别为钢轨扣件、

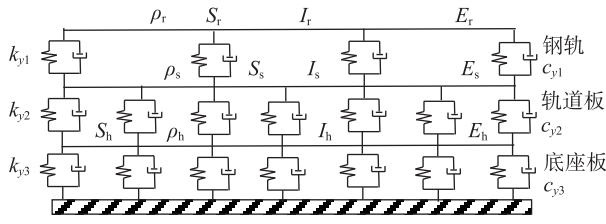


图1 轨道结构梁谱几何单元模型

Fig.1 Spectral geometry element model of track structure beam

CA砂浆、路基的刚度系数; c_{y1} , c_{y2} , c_{y3} 分别为钢轨扣件、CA砂浆、路基的阻尼系数。轨道结构在划分单元时,可以较大。

1.1 基于谱几何法的轨道结构单元公式推导

由于弹性梁的动力学方程为四阶微分方程,其位移函数需满足四阶导数存在且三阶连续可导。为解决位移函数一、二、三阶导数可能存在不连续问题,本文采用谱几何法^[12]表示钢轨、轨道板和底座板的位移分别为

$$\begin{cases} w_r(x,t) = w_{rf}(x)e^{i\omega t} \\ w_{rf}(x) = \sum_{m=0}^{M_0} A_m^r \cos(\lambda_m x) + \sum_{m=-4}^{-1} A_m^r \sin(\lambda_m x) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} w_s(x,t) = w_{sf}(x)e^{i\omega t} \\ w_{sf}(x) = \sum_{m=0}^{M_0} A_m^s \cos(\lambda_m x) + \sum_{m=-4}^{-1} A_m^s \sin(\lambda_m x) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} w_h(x,t) = w_{hf}(x)e^{i\omega t} \\ w_{hf}(x) = \sum_{m=0}^{M_0} A_m^h \cos(\lambda_m x) + \sum_{m=-4}^{-1} A_m^h \sin(\lambda_m x) \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\lambda_m = \frac{m\pi x}{L}$, $x \in [0, L]$; $w_r(x, t)$, $w_{rf}(x)$ 分别为钢轨时域、频域位移; $w_s(x, t)$, $w_{sf}(x)$ 分别为轨道板时域、频域位移; $w_h(x, t)$, $w_{hf}(x)$ 分别为钢轨时域、频域位移; A_m^r , A_m^s , A_m^h 分别为钢轨、轨道板、底座板的待定系数; L 为轨道结构单元长度; ω 为圆频率; M_0 为截断数。

式(1),式(2),式(3)可以表达为

$$w_r(x) = \varphi A^r, \quad w_s(x) = \varphi A^s, \quad w_h(x) = \varphi A^h \quad (4)$$

式中:

$$\varphi = [\sin(\lambda_{-4}x) \quad \sin(\lambda_{-3}x) \quad \dots \quad \cos(\lambda_{M_0}x)] \quad (5)$$

$$\begin{cases} A^r = [A_{-4}^r & A_{-3}^r & \dots & A_{M_0}^r]^T \\ A^s = [A_{-4}^s & A_{-3}^s & \dots & A_{M_0}^s]^T \\ A^h = [A_{-4}^h & A_{-3}^h & \dots & A_{M_0}^h]^T \end{cases} \quad (6)$$

轨道结构单元系数向量可以写成

$$A = \begin{bmatrix} A^r \\ A^s \\ A^h \end{bmatrix} \quad (7)$$

钢轨的弯曲应变能 V_{pr} , 动能 T_{br} 分别为

$$V_{pr} = \frac{1}{2} \int_0^L E_r I_r \left[\frac{\partial^2 w_r(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (8)$$

$$T_{br} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^L \rho_r S_r w_r(x,t)^2 dx \quad (9)$$

同理可得:轨道板的弯曲应变能 V_{ps} 和动能 T_{bs} , 底座板的弯曲应变能 V_{ph} 和动能 T_{bh} 。

钢轨扣件、CA砂浆、路基的势能 V_s 为

$$\begin{aligned} V_s = & \frac{1}{2} k_{y1} \sum_{p=0}^{p_1} [w_r(pl_0, t) - w_s(pl_0, t)]^2 + \\ & \frac{1}{2} k_{y2} \int_0^L [w_s(x, t) - w_h(x, t)]^2 dx + \\ & \frac{1}{2} k_{y3} \int_0^L w_h(x, t)^2 dx \end{aligned} \quad (10)$$

钢轨扣件、CA砂浆、路基的耗散能 D 为

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{2} i c_{y1} \omega \sum_{p=0}^{p_1} [w_r(pl_0, t) - w_s(pl_0, t)]^2 + \\ & \frac{1}{2} i c_{y2} \omega \int_0^L [w_s(x, t) - w_h(x, t)]^2 dx + \\ & \frac{1}{2} i c_{y3} \omega \int_0^L w_h(x, t)^2 dx \end{aligned} \quad (11)$$

式中: p_1 为每个轨道单元中钢轨扣件数减1; l_0 为扣件间距。

外力简谐荷载 $F e^{i\omega t}$ 做功 W_e 为

$$W_e = F e^{i\omega t} w_r(x, t) \Big|_{x=x_j} \quad (12)$$

式中: x_j 为简谐荷载作用于轨道结构单元的 x 坐标。

系统总能量 L_a 可表示为

$$L_a = V_{pr} + V_{ps} + V_{ph} + V_s + D - T_{br} - T_{bs} - T_{bh} - W_e \quad (13)$$

采用 Rayleigh-Ritz 法表示为

$$\frac{\partial L_a}{\partial A_m^r} = 0, \quad \frac{\partial L_a}{\partial A_m^s} = 0, \quad \frac{\partial L_a}{\partial A_m^h} = 0 \quad (14)$$

可得基于谱几何法的轨道结构单元动力学方程为

$$(K^e + i\omega C^e - \omega^2 M^e) A^e = Q^e \quad (15)$$

式中: K^e , C^e , M^e , Q^e 分别为基于谱几何法的轨道结构单元刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵和荷载向量, 其表达式见参考文献[19]。

1.2 轨道结构单元之间耦合

由于谱几何法没有离散结点,轨道结构单元之间不能采用“结点”组集,为了实现轨道结构单元的组装,在轨道结构单元之间引入虚拟竖向弹簧和转

角弹簧,如图2所示。图2中, k_r, k_s, k_h 分别表示钢轨、轨道板、底座板竖向虚拟弹簧刚度; k_{cr}, k_{cs}, k_{ch} 分别表示钢轨、轨道板、底座板虚拟转角弹簧刚度。图2中,红色圆圈处设置轨道板虚拟线弹簧和旋转弹簧,黑色圆圈处设置底座板虚拟线弹簧和旋转弹簧。

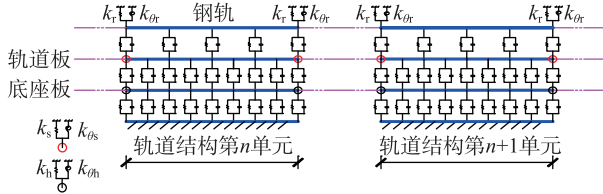


图2 轨道结构单元之间的连接模型

Fig. 2 Connection model between track structure elements

钢轨、轨道板、底座板单元之间竖向虚拟弹簧的耦合势能表示为

$$V_{cr} = \frac{1}{2} e^{2i\omega t} k_r \left[w_{rf}^{n+1}(x) \Big|_{x=0} - w_{rf}^n(x) \Big|_{x=L} \right]^2 + \frac{1}{2} e^{2i\omega t} k_s \left[w_{sf}^{n+1}(x) \Big|_{x=0} - w_{sf}^n(x) \Big|_{x=L} \right]^2 + \frac{1}{2} e^{2i\omega t} k_h \left[w_{hf}^{n+1}(x) \Big|_{x=0} - w_{hf}^n(x) \Big|_{x=L} \right]^2 \quad (16)$$

式中: $w_{rf}^n(x)$, $w_{rf}^{n+1}(x)$, $w_{sf}^n(x)$, $w_{sf}^{n+1}(x)$, $w_{hf}^n(x)$, $w_{hf}^{n+1}(x)$ 分别为钢轨、轨道板、底座板第 $n, n+1$ 单元的频域位移。

根据式(16)求得钢轨单元之间、轨道板单元之间、底座板单元之间虚拟竖向耦合弹簧刚度矩阵

$\mathbf{K}_{cr}^{n, n+1}$, $\mathbf{K}_{cs}^{n, n+1}$, $\mathbf{K}_{ch}^{n, n+1}$ 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{cr}^{n, n+1} = k_r \mathbf{K}_{c0}^{n, n+1} \\ \mathbf{K}_{cs}^{n, n+1} = k_s \mathbf{K}_{c0}^{n, n+1} \\ \mathbf{K}_{ch}^{n, n+1} = k_h \mathbf{K}_{c0}^{n, n+1} \end{cases} \quad (17)$$

式中,

$$\mathbf{K}_{c0}^{n, n+1} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}^T|_{x=L})(\boldsymbol{\varphi}|_{x=L}) & -(\boldsymbol{\varphi}^T|_{x=L})(\boldsymbol{\varphi}|_{x=0}) \\ -(\boldsymbol{\varphi}^T|_{x=0})(\boldsymbol{\varphi}|_{x=L}) & (\boldsymbol{\varphi}^T|_{x=0})(\boldsymbol{\varphi}|_{x=0}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

钢轨单元之间、轨道板单元之间、底座板单元之间虚拟转角弹簧的耦合势能表示为

$$V_{cr\theta} = \frac{1}{2} e^{2i\omega t} K_{\theta r} \left\{ \frac{\partial w_{rf}^{n+1}(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial w_{rf}^n(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right\}^2 + \frac{1}{2} e^{2i\omega t} K_{\theta s} \left\{ \frac{\partial w_{sf}^{n+1}(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial w_{sf}^n(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right\}^2 + \frac{1}{2} e^{2i\omega t} K_{\theta h} \left\{ \frac{\partial w_{hf}^{n+1}(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial w_{hf}^n(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} \right\}^2 \quad (19)$$

根据式(19)求得钢轨单元之间、轨道板单元之间、底座板单元之间的虚拟转角耦合弹簧刚度矩阵

$\mathbf{K}_{cr\theta}^{n, n+1}$, $\mathbf{K}_{cs\theta}^{n, n+1}$, $\mathbf{K}_{ch\theta}^{n, n+1}$ 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{cr\theta}^{n, n+1} = K_{\theta r} \mathbf{K}_{c0\theta}^{n, n+1} \\ \mathbf{K}_{cs\theta}^{n, n+1} = K_{\theta s} \mathbf{K}_{c0\theta}^{n, n+1} \\ \mathbf{K}_{ch\theta}^{n, n+1} = K_{\theta h} \mathbf{K}_{c0\theta}^{n, n+1} \end{cases} \quad (20)$$

式中,

$$\mathbf{K}_{c0\theta}^{n, n+1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}^T}{dx} \Big|_{x=L} \right) \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dx} \Big|_{x=L} \right) - \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}^T}{dx} \Big|_{x=L} \right) \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dx} \Big|_{x=0} \right) \\ - \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}^T}{dx} \Big|_{x=0} \right) \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dx} \Big|_{x=L} \right) \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}^T}{dx} \Big|_{x=0} \right) \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dx} \Big|_{x=0} \right) \end{bmatrix} \quad (21)$$

1.3 轨道结构单元组装

运用“单元”“对座入号法”将谱几何轨道结构单元刚度矩阵、阻尼矩阵、质量矩阵、轨道结构单元之间的虚拟弹簧耦合刚度矩阵及外荷载向量组装到整个轨道结构中,可得轨道结构动力学方程为

$$(\mathbf{K}_1 + i\omega \mathbf{C}_1 - \omega^2 \mathbf{M}_1) \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 \quad (22)$$

式中: \mathbf{K}_1 , \mathbf{C}_1 , \mathbf{M}_1 , \mathbf{Q}_1 分别为基于谱几何法的轨道结构总体刚度矩阵,质量矩阵,阻尼矩阵,荷载向量。轨道结构总体系数向量 \mathbf{A}_1 可根据式(22)求解,再将系数向量分解,代入式(4)中可求得轨道结构任意位置的频域位移。

2 基于谱几何法的轨道结构数值分析

2.1 模型验证

基于本文的无砟轨道结构三层梁模型,表1为轨道结构计算参数,其中泊松比为0.3,钢轨扣件间距表示为 l_0 ,这里取0.65 m。在钢轨跨中施加单位简谐荷载 $F = e^{i\omega t}$,轨道结构长度取65 m,计算频域范围为1~2 000 Hz。图3、图4、图5分别为基于谱几何法(SGM)与有限元法(FEM)的钢轨、轨道板、底座板垂向位移导纳。由图3~图5可知,基于谱几何法的计算结果与有限元法的相同,证明基于谱几何法计算轨道结构振动响应具有可行性。

当采用谱几何法计算如图3~图5的轨道结构位移导纳时,轨道单元尺寸取3.25 m,当截断数为5时,计算结果才收敛,此时,计算时间为79 s;当采用有限元法计算如图3~图5的轨道结构位移导纳时,轨道结构的公式参见文献[20],当轨道结构单元尺寸取0.325 m时,计算结果才收敛,此时,有限元法的计算时间为638 s,比采用谱几何法计算效率慢8

表1 轨道结构参数

Tab.1 Track structure parameters

类别	符号	数值
钢轨	弹性模量/GPa	E_r 210
	密度/(kg/m ³)	ρ_r 7 850
	截面面积/m ²	S_r 7.745×10 ⁻³
	绕水平轴惯性矩/m ⁴	I_r 3.217×10 ⁻⁵
轨道板	弹性模量/GPa	E_s 36
	密度/(kg/m ³)	ρ_s 2 500
	截面面积/m ²	S_s 0.51/2
	绕水平轴惯性矩/m ⁴	I_s 1.7×10 ⁻³ /2
底座板	弹性模量/GPa	E_h 26
	密度/(kg/m ³)	ρ_h 2 500
	截面面积/m ²	S_h 0.885/2
	绕水平轴惯性矩/m ⁴	I_h 6.6×10 ⁻³ /2
扣件	垂向刚度/(kN/mm)	k_{y1} 100
垫板	垂向阻尼/(kN·s/m)	c_{y1} 60
CA砂浆	垂向刚度/(MN/m ²)	k_{y2} 700
	垂向阻尼/(kN·s/m ²)	c_{y2} 50
路基	垂向刚度/(MN/m ²)	k_{y3} 60
	垂向阻尼/(kN·s/m ²)	c_{y3} 100

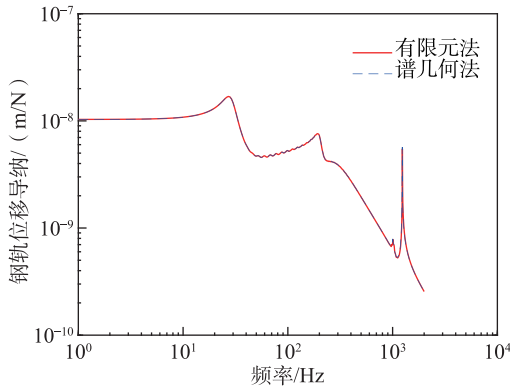


图3 钢轨垂向位移导纳

Fig. 3 Vertical displacement admittance of rail

倍,证明谱几何法具有高效性。

2.2 虚拟竖向、转角弹簧刚度取值范围讨论

为讨论钢轨、轨道板、底座板的虚拟竖向、转角弹簧刚度取值范围,钢轨、轨道板、底座板虚拟竖向、转角弹簧刚度值分别取其对应的抗弯刚度的10³、10⁴、10⁵、10⁶、10⁸、10¹⁰倍。

钢轨 Pinned-Pinned 频率及 Pinned-Pinned 频率处位移导纳幅值如表2所示。由表2可知虚拟线性、转角弹簧刚度大于或等于钢轨、轨道板、底座板抗弯刚度的10⁵倍时,计算收敛,因此大于或等于构

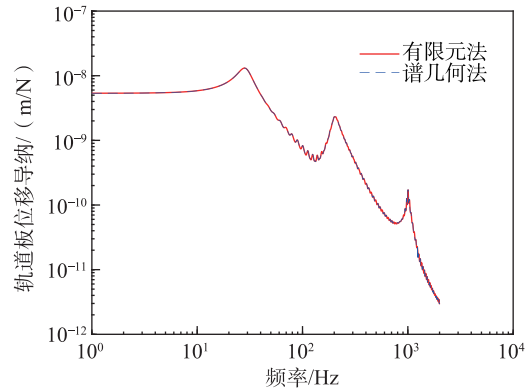


图4 轨道板垂向位移导纳

Fig. 4 Vertical displacement admittance of slab

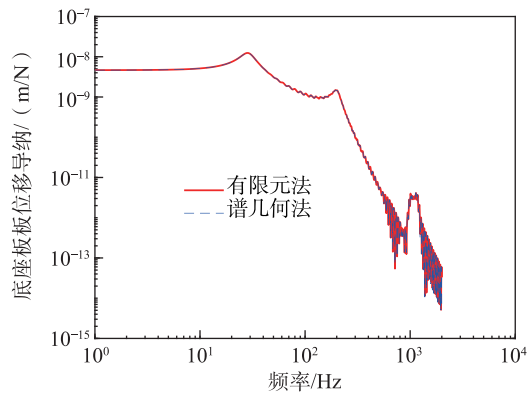


图5 底座板垂向位移导纳

Fig. 5 Vertical displacement admittance of support layer

表2 虚拟竖向、转角弹簧刚度对收敛性影响

Tab.2 The influence of virtual vertical and rotational spring stiffness on convergence

虚拟竖向、转角 弹簧刚度/ (i=r, s, h)	钢轨 Pinned-Pinned 频率/Hz	Pinned-Pinned 频率处钢轨位移导 纳幅值/(mm/N)
10 ³ E _i I _i	1 198	6.13e-6
10 ⁴ E _i I _i	1 237	5.64e-6
10 ⁵ E _i I _i	1 242	5.44e-6
10 ⁶ E _i I _i	1 242	5.44e-6
10 ⁸ E _i I _i	1 242	5.44e-6
10 ¹⁰ E _i I _i	1 242	5.44e-6

件抗弯刚度的10⁵倍为虚拟竖向、转角弹簧刚度取值范围。

2.3 轨道结构单元尺寸、截断数对计算效率的影响

为讨论基于谱几何法的轨道结构位移导纳计算时间与轨道结构单元尺寸、截断数的关系,钢轨、轨道板、底座板的虚拟竖向、转角弹簧刚度取

值为对应的抗弯刚度的 10^3 倍。考虑轨道结构单元尺寸划分为0.65、1.30、3.25、6.50 m共4种工况,其收敛时的截断数、轨道结构整体特性矩阵规模、计算效率如表3所示。由表3可知,轨道结构单元尺寸取0.65、1.30、3.25、6.50 m时,截断数分别取1、3、5、15时收敛。单元长度为0.65 m时,矩阵规模最大,计算时间最长,单元长度为3.25、6.50 m时,截断数虽然不同,但矩阵规模相同,计算时间为79 s,计算最快。因此3.25、6.50 m可作为谱几何法计算的参考单元长度。需注意的是,当轨道结构不划分单元时,无论截断数取多大,计算不收敛,因此,基于谱几何法计算轨道结构动力响应时需划分单元。

表3 轨道结构单元尺寸与截断数

Tab.3 Size and truncation numbers of track structural units

轨道结构单元尺寸/m	单元数	截断数 M_0	轨道结构整体矩阵规模	计算时间/s
6.50	10	15	600×600	79
3.25	20	5	600×600	79
1.30	50	3	1 200×1 200	103
0.65	100	1	1 800×1 800	338

2.4 轨道结构自振频率分析

基于本文的谱几何法无砟轨道结构三层梁模型,表1为轨道结构计算参数,在钢轨跨中施加单位简谐荷载,轨道结构长度取65 m,计算频域范围为1~2 000 Hz,轨道结构单元取3.25 m,截断数取5,计算得到轨道结构振动响应如图6所示。由图6可知,钢轨在频率29、196、1 235 Hz处有峰

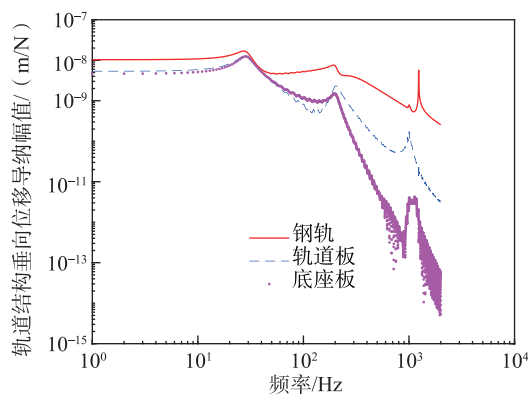


图6 轨道结构垂向位移导纳

Fig. 6 Vertical displacement admittance of track structure

值,轨道板在29、196、1 006 Hz处有峰值,底座板在29、196、1 006~1 235 Hz处有峰值;其中29、196 Hz为轨道结构系统一、二阶自振频率,1 235 Hz为钢轨 Pinned-Pinned 频率;轨道板在1 006 Hz处的峰值、底座板在1 006~1 235 Hz处的峰值由钢轨 Pinned-Pinned 振动引起。钢轨也在1 006 Hz处有小峰值。

2.5 轨道结构自振频率参数分析

在表1其他参数不变的情况下,分析扣件、CA砂浆、路基的阻尼及刚度共6种工况对轨道结构自振频率的影响。

2.5.1 扣件阻尼的影响

图7~图9为在表1其他参数不变的情况下,扣件阻尼系数为20、60、100、140 kN·s/m下轨道结构垂向振动位移导纳。由图7可知,随着扣件阻尼减

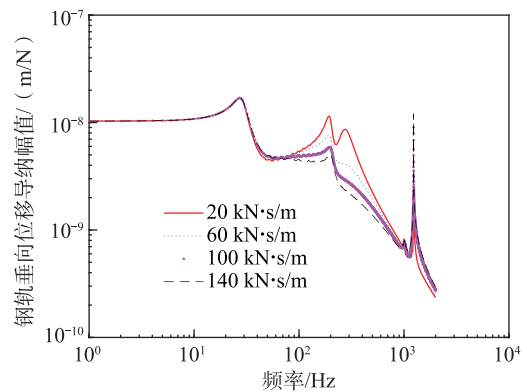


图7 不同扣件阻尼系数下的钢轨垂向位移导纳

Fig. 7 Vertical displacement admittance of rail with different fastener damping coefficients

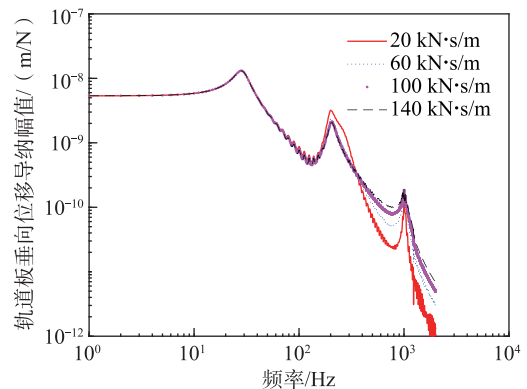


图8 不同扣件阻尼系数下的轨道板垂向位移导纳

Fig. 8 Vertical displacement admittance of slab with different fastener damping coefficients

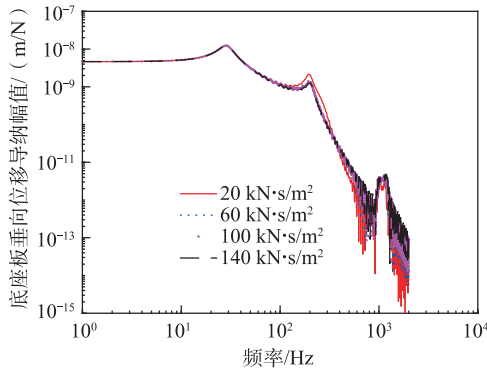


图9 不同扣件阻尼下底座板垂向位移导纳

Fig. 9 Vertical displacement admittance of support layer with different fastener damping

小,三阶自振频率处的峰值更为显著,为275 Hz。由图7~图9可知,随着扣件阻尼增大,钢轨、轨道板、底座板的一、二阶自振频率不变,二阶自振频率对应的峰值衰减,说明扣件阻尼主要衰减钢轨三阶自振对应的峰值以及轨道结构二阶自振对应的峰值。

2.5.2 CA砂浆阻尼的影响

图10~图12为在表1其他参数不变的情况下,CA砂浆阻尼系数为10、50、90、130 kN·s/m²下轨道结构垂向振动位移导纳。由图10~图12可知,随着CA砂浆阻尼增大,钢轨、轨道板、底座板的一、二阶自振频率不变,二阶自振频率对应的峰值衰减,说明CA砂浆阻尼主要衰减轨道结构二阶自振频率对应的峰值。

2.5.3 路基阻尼的影响

图13~图15为在表1其他参数不变的情况下,路基阻尼系数为20、60、100、140 kN·s/m²下轨道结构垂向振动位移导纳。由图13~图15可知,随着CA砂浆

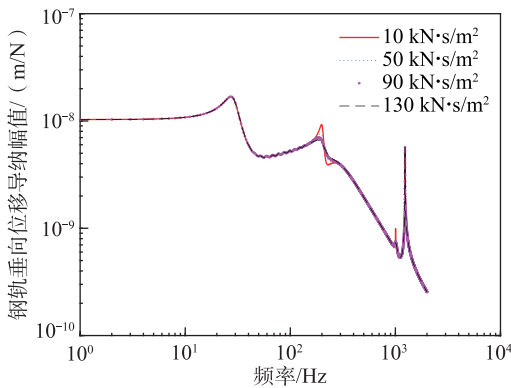


图10 不同CA砂浆阻尼下钢轨垂向位移导纳

Fig. 10 Vertical displacement admittance of rail with different CA mortar damping

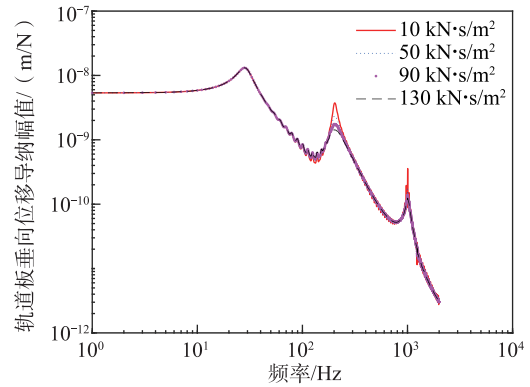


图11 不同CA砂浆阻尼下轨道板垂向位移导纳

Fig. 11 Vertical displacement admittance of slab with different CA mortar damping

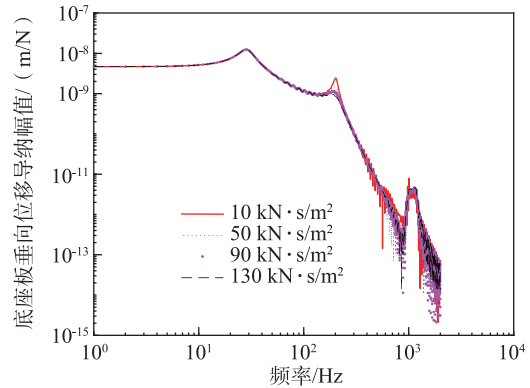


图12 不同CA砂浆阻尼下底座板垂向位移导纳

Fig. 12 Vertical displacement admittance of support layer with different CA mortar damping

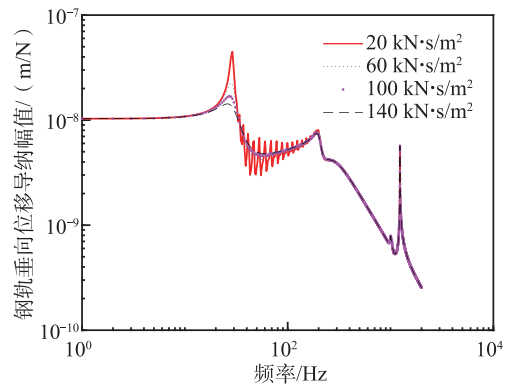


图13 不同路基阻尼下钢轨垂向位移导纳

Fig. 13 Vertical displacement admittance of rail with different subgrade damping

阻尼减小,钢轨、轨道板、底座板的一、二阶自振频率不变,一阶自振频率对应的峰值增大,说明路基阻尼

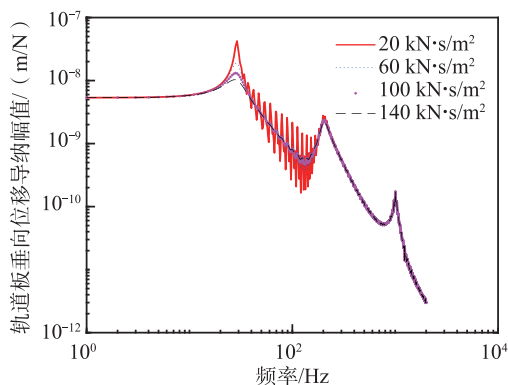


图 14 不同路基阻尼下轨道板垂向位移导纳
Fig. 14 Vertical displacement admittance of slab with different subgrade damping

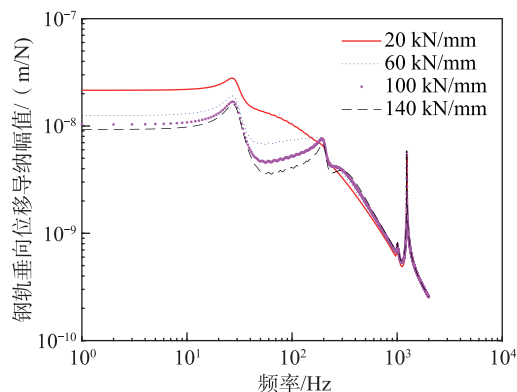


图 16 不同扣件刚度系数下的钢轨垂向位移导纳
Fig. 16 Vertical displacement admittance of rail with different fastener stiffness

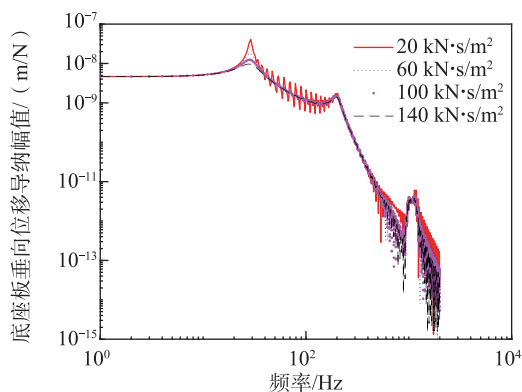


图 15 不同路基阻尼下底座板垂向位移导纳
Fig. 15 Vertical displacement admittance of support layer with different subgrade damping

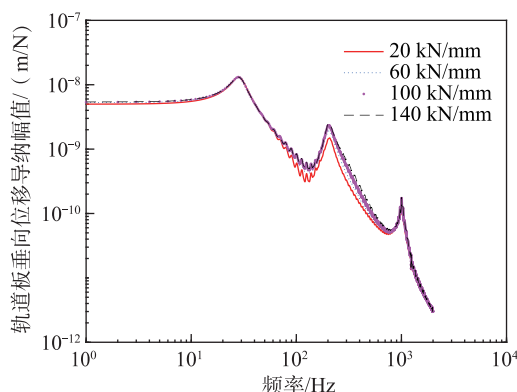


图 17 不同扣件刚度系数下的轨道板垂向位移导纳
Fig. 17 Vertical displacement admittance of slab with different fastener stiffness

主要衰减轨道结构一阶自振频率对应的峰值。

2.5.4 扣件刚度的影响

图 16~图 18 为 4 种扣件刚度系数:20、60、100、140 kN/mm 下轨道结构垂向振动位移导纳。由图 16~图 18 可知,随着扣件刚度增大,钢轨三阶自振频率增大,且该频率处的峰值更加显著;钢轨的一、二阶自振频率不变,对应的峰值减小;钢轨 Pinned-Pinned 频率不变;轨道板、底座板一、二阶自振频率不变,一阶频率对应的峰值不变,二阶自振频率对应的峰值增大。

2.5.5 CA 砂浆刚度的影响

图 19~图 21 为 4 种 CA 砂浆刚度系数:200、700、1 200、1 700 MN/m² 下轨道结构垂向振动位移导纳。由图 19~图 21 可知,随着 CA 砂浆刚度变大时,轨道结构一阶自振频率、钢轨的 Pinned-Pinned 频率不变,二阶自振频率显著变大。

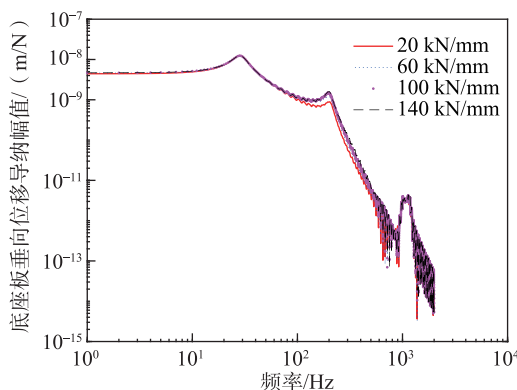


图 18 不同扣件刚度系数下的底座板垂向位移导纳
Fig. 18 Vertical displacement admittance of support layer with different fastener stiffness

2.5.6 路基刚度的影响

图 22~图 24 为 4 种路基刚度系数为 20、60、100、140 MN/m² 下轨道结构垂向振动位移导纳。由图

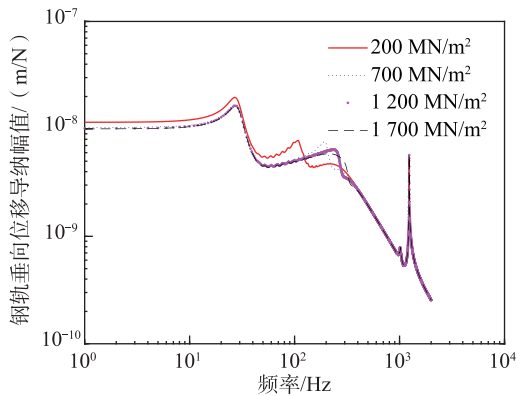


图19 不同CA砂浆刚度下钢轨垂向位移导纳
 Fig. 19 Vertical displacement admittance of rail with different CA mortar stiffness

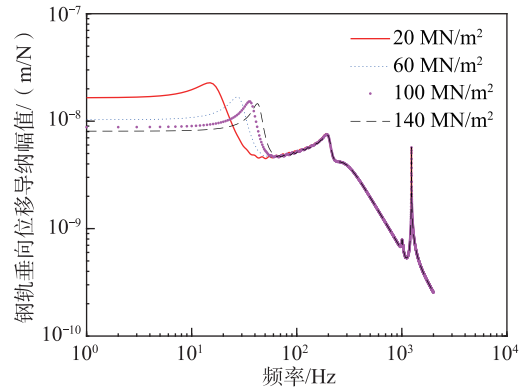


图22 不同路基刚度下钢轨垂向位移导纳
 Fig. 22 Vertical displacement admittance of rail with different subgrade stiffness

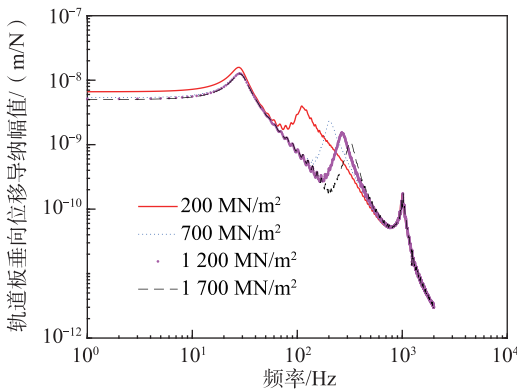


图20 不同CA砂浆刚度下轨道板垂向位移导纳
 Fig. 20 Vertical displacement admittance of slab with different CA mortar stiffness

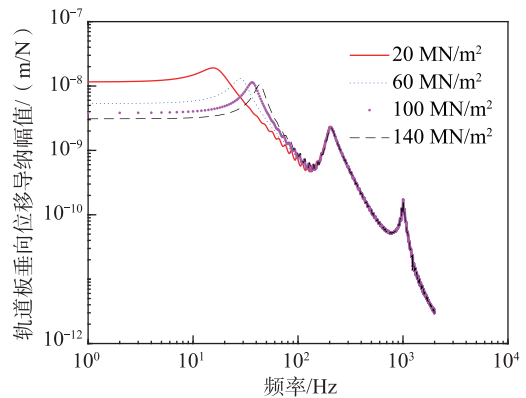


图23 不同路基刚度下轨道板垂向位移导纳
 Fig. 23 Vertical displacement admittance of slab with different subgrade stiffness

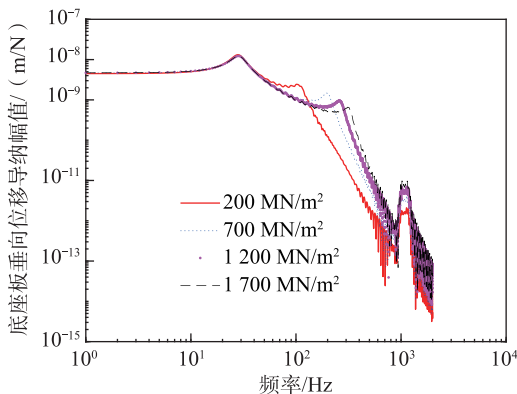


图21 不同CA砂浆刚度下底座板垂向位移导纳
 Fig. 21 Vertical displacement admittance of support layer with different CA mortar stiffness

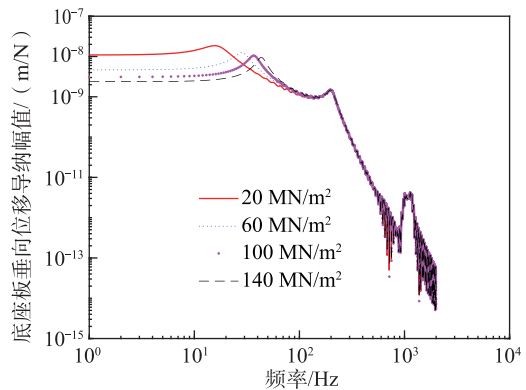


图24 不同路基刚度下底座板垂向位移导纳
 Fig. 24 Vertical displacement admittance of support layer with different subgrade stiffness

22~图24可知,随着路基刚度变大,轨道结构一阶自振频率变大,二阶、三阶自振频率、钢轨的Pinned-Pinned频率不变。

为探讨轨道结构系统一、二、三阶自振频率形成机理,忽略轨道结构的抗弯刚度,将轨道结构简化为仅考虑钢轨扣件、CA砂浆、路基刚度的三自由

度体系,如图25所示,三自由度体系的刚度、质量矩阵分别为

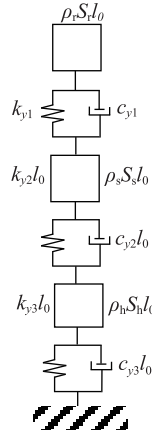


图25 轨道结构简化模型

Fig. 25 Simplified model of track structure

$$\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} k_{y1} & -k_{y1} & 0 \\ -k_{y1} & k_{y1} + k_{y2} l_0 & -k_{y2} l_0 \\ 0 & -k_{y2} l_0 & k_{y2} l_0 + k_{y3} l_0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} \rho_r S_r l_0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_s S_s l_0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_h S_h l_0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

根据刚度、质量矩阵,可以求出三自由度体系的自振频率分别为:28.9、197.0、275.0 Hz,与谱几何法计算出的结果相等。由此可知,轨道结构前三阶自振频率主要由扣件、CA砂浆和路基的刚度决定,抗弯刚度对前三阶频率影响较小,可采用三自由度体系近似计算。

3 结论

本文基于谱几何法建立了无砟轨道结构频域振动模型,并推导出其特性矩阵,分析了轨道结构单元长度、截断数对收敛性与计算效率的影响以及钢轨、轨道板、底座板的虚拟竖向与转角弹簧刚度的取值范围,对比了有限元法与谱几何法的计算效率,研究了轨道结构参数对振动特性的影响,得到以下结论。

1) 谱几何法是一种快速、高效和精确求解轨道结构全频域振动的方法。谱几何法的计算速度是有限元法的8倍。

2) 基于谱几何法计算轨道结构振动响应的轨道结构参考单元尺寸可取3.25、6.50 m;虚拟竖向、转角弹簧刚度系数的取值为大于或等于构件抗弯

刚度的 10^5 。

3) 当不考虑轨道结构抗弯刚度,无砟轨道结构自振频率只与钢轨扣件、CA砂浆、路基刚度有关,可以简化成三自由度体系计算。扣件刚度主要影响钢轨三阶自振频率;CA砂浆刚度主要影响二阶自振频率;路基刚度主要影响轨道结构一阶自振频率。扣件阻尼主要衰减钢轨三阶自振频率、以及轨道板、底座板二阶频率对应峰值,CA砂浆阻尼主要衰减轨道结构二阶自振频率对应峰值;路基阻尼主要衰减轨道结构一阶自振频率对应峰值。

参考文献:

- [1] 徐金辉, 马晓川, 冯青松, 等. CRTS II型板式轨道垂直向振动传递特性的影响因素[J]. 武汉大学学报(工学版), 2021, 54(10): 966-974.
XU J H, MA X C, FENG Q S, et al. Influence factors of vertical vibration transmission characteristics of CRTS II slab track[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2021, 54(10): 966-974.
- [2] 关庆华, 王文波, 温泽峰, 等. 高速移动载荷下的轨道振动特性[J]. 机械工程学报, 2022, 58(14): 296-307.
GUAN Q H, WANG W B, WEN Z F, et al. Vibration behaviour of railway track under high speed moving load[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(14): 296-307.
- [3] 马维国, 关庆华, 钟文生, 等. 轨道参数对轮轨耦合系统固有频率的影响[J]. 噪声与振动控制, 2019, 39(3): 18-23, 55.
MA W G, GUAN Q H, ZHONG W S, et al. Influence of track parameters on natural frequencies of wheel-track coupling systems[J]. Noise and Vibration Control, 2019, 39(3): 18-23, 55.
- [4] 高亮, 崔日新, 侯博文, 等. 板式无砟轨道钢轨共振特性影响参数敏感性分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2018, 45(3): 115-121.
GAO L, CUI R X, HOU B W, et al. Sensitivity analysis of influence parameters on resonance characteristics of ballastless track rail[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2018, 45(3): 115-121.
- [5] 罗锴, 王凯新, 甄慧杰, 等. CRTS III型板和双块式无砟轨道振动噪声特性研究[J]. 华东交通大学学报, 2024, 41(3): 29-36.
LUO K, WANG K X, ZHEN H J, et al. Investigation of vibration and noise characteristics in CRTS III plate and double-block ballastless track[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2024, 41(3): 29-36.
- [6] CARLONE L, THOMPSON D J. Vibrations of a rail coupled to a foundation beam through a series of discrete

- elastic supports[R]. Southampton: Institute of Sound and Vibration research, University of Southampton, 2001.
- [7] THOMPSON D J, JONES C J C. Thameslink 2000 metropolitan junction to London vibration studies[R]. Southampton: Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, 1997.
- [8] 罗文俊, 杨鹏奇, 张子正. 基于FE-SEA混合法箱形梁结构噪声预测分析[J]. 铁道学报, 2019, 41(8): 100-107.
LUO W J, YANG P Q, ZHANG Z Z. Prediction and analysis of structural noise of box girder based on FE-SEA hybrid method[J]. Journal of the China Railway Society, 2019, 41(8): 100-107.
- [9] 雷晓燕, 翁凌霄, 余亮亮, 等. 基于混合FE-SEA法的箱梁结构噪声特性研究[J]. 华东交通大学学报, 2023, 40(4): 1-8.
LEI X Y, WENG L X, YU L L, et al. Structural noise of box girder for elevated track: an analysis based on the hybrid FE-SEA model and experiment[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2023, 40(4): 1-8.
- [10] 蒋士亮. 基于谱几何法的板壳结构动力学建模与特性分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2015.
JIANG S L. The spectro-geometric method for dynamics modeling and characteristics analysis of plate and shell structures[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2015.
- [11] 石先杰. 复杂边界条件下旋转结构统一动力学模型的构建与研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2014.
SHI X J. The construction and analysis on unified dynamical model of revolve structures subjected to complex boundary conditions[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2014.
- [12] 李海虹, 王昊, 郭山国, 等. 任意边界条件下弹性梁耦合振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2022, 41(17): 48-54.
LI H H, WANG H, GUO S G, et al. Coupled vibration characteristics analysis of elastic beam under arbitrary boundary conditions[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(17): 48-54.
- [13] BAO S Y, CAO J R, WANG S D. Vibration analysis of nanorods by the Rayleigh-Ritz method and truncated Fourier series[J]. Results in Physics, 2019, 12: 327-334.
- [14] SHI X J, SHI D Y. Free and forced vibration analysis of T-shaped plates with general elastic boundary supports[J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2018, 37(2): 355-372.
- [15] SHI X J, ZUO P, ZHONG R, et al. Thermal vibration analysis of functionally graded conical-cylindrical coupled shell based on spectro-geometric method[J]. Thin-Walled Structures, 2022, 175: 109138.
- [16] WANG G, LI W L, LIU T S. The average radiation efficiency of a plate immersed in water with general boundary conditions[J]. Mechanics Research Communications, 2020, 106: 103532.
- [17] HE D Z, WANG Q S, ZHONG R, et al. A unified analysis model of FGM double-layered submarine type coupled structure with spectral geometry method[J]. Ocean Engineering, 2023, 267: 113213.
- [18] ZHANG Y, SHI D Y, HE D Z. A Spectro-geometric solution of dynamic characteristics of submarine-like structures[J]. Composite Structures, 2022, 299: 115976.
- [19] 吴神花, 雷晓燕, 余翠英. 基于谱几何法的车辆-轨道结构频域振动分析[J]. 振动与冲击, 2025, 44(12): 101-109.
WU S H, LEI X Y, YU C Y. Frequency domain vibration characteristics of vehicle-track structure based on the spectral geometry method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2025, 44(12): 101-109.
- [20] 雷晓燕, 吴神花, 张斌. 车辆-轨道非线性耦合系统交叉迭代算法及应用[J]. 噪声与振动控制, 2016, 36(4): 113-119.
LEI X Y, WU S H, ZHANG B. Cross-iterative algorithm and its application to the analysis of vehicle-track nonlinear coupling systems[J]. Noise and Vibration Control, 2016, 36(4): 113-119.



第一作者: 吴神花(1989—), 女, 讲师, 博士, 研究方向为车辆-轨道结构振动噪声。E-mail: 466980214@qq.com。



通信作者: 雷晓燕(1956—), 男, 教授, 博士, 研究方向为车辆-轨道结构振动噪声。E-mail: xiaoyanlei2013@163.com。

(责任编辑: 吴海燕)