文章编号:1005-0523(2026)05-0118-09

光磁作用诱导的磁振子-磁振子和光-微波纠缠及纠缠转移

李明翠[1],陈爱喜[2]

(1. 华东交通大学信息与软件工程学院,江西 南昌 330013;2. 浙江理工大学理学院,浙江 杭州 310018)

摘要:文章提出在杂化腔光磁系统中实现两体和三体纠缠及纠缠转移的方案。该系统包含两个钇铁石榴石(YIG)小球(YIG1和YIG2),其中各磁振子模式均与微波模式强耦合,且YIG1同时用作回音壁模式(WGM)谐振腔。利用光学光子与磁振子之间的中等强度三模共振相互作用,系统可产生无直接相互作用的磁振子-磁振子纠缠和光-微波纠缠,并实现纠缠在不同子系统间的可控转移。通过调节光学模式的失谐量,可以便捷地将YIG1中磁振子模式的纠缠对象在光学模式、磁振子模式和微波模式之间切换。此外,光学-磁振子-磁振子模式、光学-磁振子-微波模式以及磁振子-磁振子-微波模式这三体纠缠,也可通过调节失谐量和驱动功率进行相互转换。该结果为融合光学、磁振子和微波等多种物理体系的量子节点提供了产生纠缠和控制纠缠转移的灵活方案,可用于基于纠缠的量子应用。

关键词:纠缠;腔光磁学;转移

中图分类号:O431.2 **文献标志码:**A

本文引用格式:李明翠,陈爱喜. 光磁作用诱导的磁振子-磁振子和光-微波纠缠及纠缠转移[J]. 华东交通大学学报,2026,43(5):118-126.

Optomagnonics-Induced Magnon-Magnon and Optical-Microwave Entanglement with Entanglement Transfer

Li Mingcui[1], Chen Aixi[2]

(1. School of Information and Software Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;
2. School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: We propose a scheme to achieve bipartite and tripartite entanglement in a hybrid cavity optomagnonic system, which consists of a microwave cavity with two yttrium iron garnet (YIG) spheres (YIG1 and YIG2), with YIG1 also serving as a whispering-gallery-mode (WGM) resonator. Based on the moderately strong-coupling triple-resonant interaction of the optomagnonic system, magnon-magnon and optical-microwave entanglement can be achieved. Moreover, this scheme enables controlled transfer of entanglement among different subsystems. The entangled partner of the magnon mode in YIG1 can be easily switched among the optical, magnon, and microwave modes by adjusting the optical detuning, thereby enabling entanglement transfer. Tripartite optical-magnon-magnon, optical-magnon-microwave, and magnon-magnon-microwave entanglement can also be obtained and conveniently transferred by adjusting the detuning and driving power. These results provide flexible

收稿日期:2025-06-26
基金项目:国家自然科学基金项目(12464048);江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ2400512)

controllability of bipartite and tripartite entanglement and their transfer for quantum nodes integrating multiple physical systems (optical, magnonic, and microwave), which can be applied in entanglement-based quantum applications.

Key words: entanglement; optomagnonics; transfer

Citation format: Li Mingcui, Chen Aixi. Optomagnonics-induced magnon-magnon and optical-microwave entanglement with entanglement transfer[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2026, 43(5): 118–126.

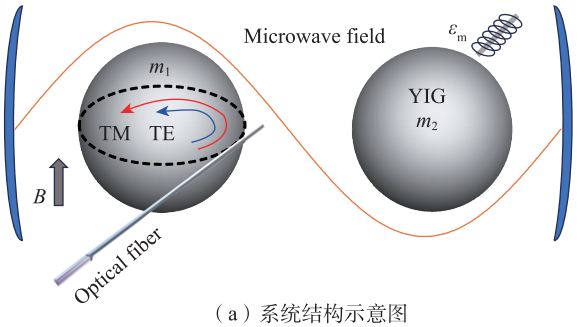
磁振子具有能量耗散率低、频率可通过偏置磁场灵活调节等优良特性[1-2]。实验表明，在高品质腔中，铁磁材料中的磁振子与微波腔中的微波光子可通过磁偶极相互作用实现强耦合甚至超强耦合[3-6]。此外，利用铁磁材料中的磁致伸缩力可实现磁振子与声子的相互作用[7]；在微波腔中，磁振子也可与超导量子比特实现强耦合[8]；在腔光磁系统中，磁振子还能与自旋轨道耦合的光子发生相互作用[9-10]。磁振子与原子、光子、声子、极化子等系统的兼容性，为以磁振子为媒介的量子信息处理与转换提供了良好的研究基础[11-13]。

杂化腔磁振子系统为研究不同物理系统之间的纠缠提供了良好平台。利用磁晶各向异性产生的克尔非线性效应和磁偶极相互作用，可实现磁振子与微波光子之间的纠缠[14-15]。在压缩微波场或原子的辅助下，可实现磁振子之间的有效纠缠[16-17]。利用腔光子与磁振子的磁偶极相互作用及磁振子与声子的磁致伸缩相互作用，可实现磁振子、微波光子和声子之间的三体纠缠[18]。不同子系统之间的纠缠转移或量子态转移对量子信息处理与传输至关重要，例如在量子中继器等量子网络节点中的应用[19]。完美的纠缠转移可通过调节控制参数实现：使一个纠缠态趋于消失的同时，另一个纠缠态逐渐增强，从而完成从源纠缠到目标纠缠、从近端纠缠到远端纠缠的转移。在腔光力学系统中，腔光场、原子系综和机械振子之间的两两纠缠存在纠缠转移现象[20-21]。在类宇称–时间对称的腔磁力学系统中，实现不同纠缠之间完美转移的理论方案于2021年首次被提出[22]。近期，量子态的转移方案被陆续提出，例如：通过将磁振子和光学模式同时耦合到机械振子模式，实现磁振子量子态到光学量子态的转移[23]；基于qutrit（三能级量子态）的线性耦合单元，实现量子态在qutrit间转移的控制方案[24]；以及基于最佳量子态转移的平面量子路由[25]等。

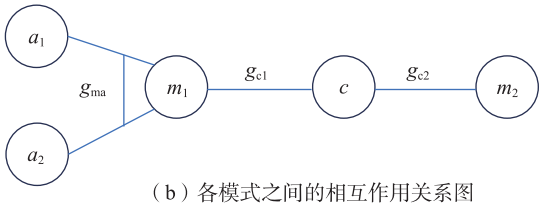
基于上述研究进展，本文提出在杂化腔光磁系统中实现两体和三体纠缠及纠缠转移的控制方案。在两体纠缠中，主要讨论两类纠缠：① 不同磁振子模式之间的纠缠；② 光学光子与微波光子之间的纠缠。在这两类纠缠中，纠缠双方均无直接相互作用。与文献[14-15]基于克尔非线性效应、文献[16]基于压缩真空场驱动、文献[17]基于原子辅助的纠缠产生机制不同，本文提出的纠缠源自磁振子与自旋轨道耦合的光学光子之间的三模共振相互作用，物理机制不同。同时，本文更侧重研究纠缠在不同子系统之间的转移控制，这也与文献[14-17]的研究内容不同。

1　模型与基本公式

系统结构示意图如图1(a)所示，两个钇铁石榴石（YIG）小球位于微波腔中，其中YIG1同时是一个回音壁模式（WGM）谐振腔。YIG1和YIG2中的磁振子模式均与微波腔中的微波光子通过磁偶极相互作用进行强耦合。YIG1中的光学WGM模式可通过纳米光纤[9, 12]、连续波激光器[10]或棱镜[26]激发。由于自旋轨道耦合，当输入光与逆时针方向的WGM轨道耦合（如图1(a)所示）时，YIG1中的磁振子模式与 σ^+（横磁模）以及 π（横电模）极化的光学光子耦合。经由磁振子激发的布里渊散射，光学WGM模式与YIG1中的Kittel模式可实现三模共振相互作用。YIG2中的Kittel模式可通过放置在YIG2附近的环形线圈驱动[9, 27]。系统中各模式之间的相互作用关系如图1(b)所示，其中 a_1 和 a_2 为两个光学模式，m_1 和 m_2 为两个磁振子模式，c 为微波模式。 a_1 ，a_2 和 m_1 之间具有三模共振相互作用。此外，m_1 和 m_2 均强耦合至微波模式。



（a）系统结构示意图



（b）各模式之间的相互作用关系图

图1 系统结构示意图以及各模式之间的相互作用关系图
Fig. 1 Sketch of the system and the interactions among the subsystems

系统的哈密顿量如式(1)所示(设约化普朗克常量 $\hbar=1$)

$$H=H_0+H_{\rm I}+H_{\rm D} \tag{1}$$

其中:

$$\begin{cases} H_0=\omega_1 a_1^{\dagger}a_1+\omega_2 a_2^{\dagger}a_2+\omega_{\rm m1}m_1^{\dagger}m_1+\\ \qquad \omega_{\rm m2}m_2^{\dagger}m_2+\omega_{\rm c}c^{\dagger}c\\ H_{\rm I}=g_{\rm ma}(a_1a_2^{\dagger}m_1^{\dagger}+a_1^{\dagger}a_2m_1)+\\ \qquad g_{\rm c1}(c^{\dagger}m_1+cm_1^{\dagger})+g_{\rm c2}(c^{\dagger}m_2+cm_2^{\dagger})\\ H_{\rm D}=\mathrm{i}\varepsilon_1(a_1^{\dagger}e^{-\mathrm{i}\omega_{\rm p}t}-a_1e^{\mathrm{i}\omega_{\rm p}t})+\\ \qquad \mathrm{i}\varepsilon_{\rm m}(m_2^{\dagger}e^{-\mathrm{i}\omega_{\rm pm}t}-m_2e^{\mathrm{i}\omega_{\rm pm}t}) \end{cases} \tag{2}$$

式中:H为系统总哈密顿量,H_0为自由哈密顿量,$H_{\rm I}$为相互作用哈密顿量,$H_{\rm D}$为驱动哈密顿量;$a_1^{\dagger}$(a_1)和$a_2^{\dagger}$(a_2)分别为TM和TE光学模式的产生(湮灭)算符;$m_1^{\dagger}$(m_1)和$m_2^{\dagger}$(m_2)分别为YIG1和YIG2中磁振子模式的产生(湮灭)算符;微波模式的产生(湮灭)算符用$c^{\dagger}$(c)表示;ω_j($j\in\{1,2,m_1,m_2,c\}$)为光学模式、磁振子模式以及微波模式的共振频率;$g_{\rm ma}$为光学模式与磁振子模式的耦合强度,$g_{\rm c1}$、$g_{\rm c2}$为磁振子与微波模式的耦合强度;$\omega_{\rm p}$为驱动TM模式光学激光频率,ε_1为驱动TM模式光学激光强度;$\omega_{\rm pm}$为YIG2磁振子模式微波场驱动频率;i为虚数单位符号;$\varepsilon_{\rm m}$为YIG2磁振子模式微波场驱动强度,将哈密顿量用幺正变换算符$U(t)=\exp\{-i[\omega_{\rm p}a_1^{\dagger}a_1+(\omega_{\rm p}-\omega_{\rm pm})a_2^{\dagger}a_2+\omega_{\rm pm}m_1^{\dagger}m_1+\omega_{\rm pm}m_2^{\dagger}m_2+\omega_{\rm pm}c^{\dagger}c]t\}$旋转,得到不含时哈密顿量。表达式为

$$\begin{cases} H_{\rm eff}=H_{0,\rm eff}+H_{\rm I,eff}+H_{\rm D,eff}\\ H_{0,\rm eff}=\Delta_1a_1^{\dagger}a_1+\Delta_2a_2^{\dagger}a_2+\Delta_{\rm m1}m_1^{\dagger}m_1+\\ \qquad \Delta_{\rm m2}m_2^{\dagger}m_2+\Delta_{\rm c}c^{\dagger}c\\ H_{\rm I,eff}=g_{\rm ma}(a_1a_2^{\dagger}m_1^{\dagger}+a_1^{\dagger}a_2m_1)+\\ \qquad g_{\rm c1}(cm_1^{\dagger}+c^{\dagger}m_1)+g_{\rm c2}(cm_2^{\dagger}+c^{\dagger}m_2)\\ H_{\rm D,eff}=\mathrm{i}\varepsilon_1(a_1^{\dagger}-a_1)+\mathrm{i}\varepsilon_{\rm m}(m_2^{\dagger}-m_2) \end{cases} \tag{3}$$

式中:下标eff表示此哈密顿量为有效哈密顿量;各失谐量$\Delta_1=\omega_1-\omega_{\rm p}$,$\Delta_2=\omega_2-(\omega_{\rm p}-\omega_{\rm pm})$,$\Delta_{\rm m1}=\omega_{\rm m1}-\omega_{\rm pm}$,$\Delta_{\rm m2}=\omega_{\rm m2}-\omega_{\rm pm}$,$\Delta_{\rm c}=\omega_{\rm c}-\omega_{\rm pm}$。系统中的两个光学模式和YIG1中的磁振子模式的频率满足三频共振条件,即$\omega_1-\omega_2-\omega_{\rm m1}=0$,从而可得$\Delta_2=\Delta_1-\Delta_{\rm m1}$。系统的量子朗之万方程为

$$\begin{cases} \dot{a}_1=-(\mathrm{i}\Delta_1+\kappa_1)a_1-\mathrm{i}g_{\rm ma}a_2m_1+\varepsilon_1+\sqrt{2\kappa_1}\,a_1^{\rm in}\\ \dot{a}_2=-(\mathrm{i}\Delta_2+\kappa_2)a_2-\mathrm{i}g_{\rm ma}a_1m_1^{\dagger}+\sqrt{2\kappa_2}\,a_2^{\rm in}\\ \dot{m}_1=-(\mathrm{i}\Delta_{\rm m1}+\gamma_1)m_1-\mathrm{i}g_{\rm ma}a_1a_2^{\dagger}-\mathrm{i}g_{\rm c1}c+\sqrt{2\gamma_1}\,m_1^{\rm in}\\ \dot{m}_2=-(\mathrm{i}\Delta_{\rm m2}+\gamma_2)m_2-\mathrm{i}g_{\rm c2}c+\varepsilon_{\rm m}+\sqrt{2\gamma_2}\,m_2^{\rm in}\\ \dot{c}=-(\mathrm{i}\Delta_{\rm c}+\kappa_{\rm c})c-\mathrm{i}g_{\rm c1}m_1-\mathrm{i}g_{\rm c2}m_2+\sqrt{2\kappa_{\rm c}}\,c^{\rm in} \end{cases} \tag{4}$$

式中:κ_1为TM光学模式耗散率,κ_2为TE光学模式耗散率,$\kappa_{\rm c}$为微波模式耗散率;γ_1为YIG1磁振子模式耗散率,γ_2为YIG2磁振子模式耗散率;算符$a_1^{\rm in}$,$a_2^{\rm in}$,$m_1^{\rm in}$,$m_2^{\rm in}$以及$c^{\rm in}$是均值为0的高斯量子噪声。将式(4)中的算符表示为稳态值$O_{\rm s}$与量子涨落算符δO的和,即$O=O_{\rm s}+\delta O$,$O\in\{a_1,a_2,m_1,m_2,c\}$,则式(4)可分解为两组方程:一组描述稳态值的代数方程,另一组描述涨落算符的朗之万方程。当满足$O_{\rm s}\gg1$时,涨落算符的朗之万方程可线性化为

$$\begin{cases} \delta\dot{a}_1=-(\mathrm{i}\Delta_1+\kappa_1)\delta a_1-\mathrm{i}g_{\rm ma}a_{2\rm s}\delta m_1-\mathrm{i}g_{\rm ma}m_{1\rm s}\delta a_2+\\ \qquad \sqrt{2\kappa_1}\,a_1^{\rm in}\\ \delta\dot{a}_2=-(\mathrm{i}\Delta_2+\kappa_2)\delta a_2-\mathrm{i}g_{\rm ma}a_{1\rm s}\delta m_1^{\dagger}-\mathrm{i}g_{\rm ma}m_{1\rm s}^{*}\delta a_1+\\ \qquad \sqrt{2\kappa_2}\,a_2^{\rm in}\\ \delta\dot{m}_1=-(\mathrm{i}\Delta_{\rm m1}+\gamma_1)\delta m_1-\mathrm{i}g_{\rm ma}a_{1\rm s}\delta a_2^{\dagger}-\mathrm{i}g_{\rm ma}a_{2\rm s}^{*}\delta a_1-\\ \qquad \mathrm{i}g_{\rm c1}\delta c+\sqrt{2\gamma_1}\,m_1^{\rm in}\\ \delta\dot{m}_2=-(\mathrm{i}\Delta_{\rm m2}+\gamma_2)\delta m_2-\mathrm{i}g_{\rm c2}\delta c+\sqrt{2\gamma_2}\,m_2^{\rm in}\\ \delta\dot{c}=-(\mathrm{i}\Delta_{\rm c}+\kappa_{\rm c})\delta c-\mathrm{i}g_{\rm c1}\delta m_1-\mathrm{i}g_{\rm c2}\delta m_2+\sqrt{2\kappa_{\rm c}}\,c^{\rm in} \end{cases} \tag{5}$$

定义正交涨落算符$\delta X_O=(\delta O^{\dagger}+\delta O)/\sqrt{2}$,$\delta Y_O=i(\delta O^{\dagger}-\delta O)/\sqrt{2}$。$X_O^{\rm in}=[(O^{\rm in})^{\dagger}+O^{\rm in}]/\sqrt{2}$,$Y_O^{\rm in}=i[(O^{\rm in})^{\dagger}-O^{\rm in}]/\sqrt{2}$,$O\in\{a_1,a_2,m_1,m_2,c\}$,式(5)可以改

写为 $\dot{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{n}(t)$。正交涨落算符向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 和噪声向量 $\boldsymbol{n}(t)$ 分别为

$$\boldsymbol{u}(t)=(\delta X_{\mathrm{a1}},\delta Y_{\mathrm{a1}},\delta X_{\mathrm{a2}},\delta Y_{\mathrm{a2}},\delta X_{\mathrm{m1}},\delta Y_{\mathrm{m1}},\delta X_{\mathrm{m2}},\delta Y_{\mathrm{m2}},\delta X_{\mathrm{c}},\delta Y_{\mathrm{c}})^{\top} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{n}(t)=(\sqrt{2\kappa_1}X_{\mathrm{a1}}^{\mathrm{in}},\sqrt{2\kappa_1}Y_{\mathrm{a1}}^{\mathrm{in}},\sqrt{2\kappa_2}X_{\mathrm{a2}}^{\mathrm{in}},\sqrt{2\kappa_2}Y_{\mathrm{a2}}^{\mathrm{in}},\sqrt{2\gamma_1}X_{\mathrm{m1}}^{\mathrm{in}},\sqrt{2\gamma_1}Y_{\mathrm{m1}}^{\mathrm{in}},\sqrt{2\gamma_2}X_{\mathrm{m2}}^{\mathrm{in}},\sqrt{2\gamma_2}Y_{\mathrm{m2}}^{\mathrm{in}},\sqrt{2\kappa_c}X_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}},\sqrt{2\kappa_c}Y_{\mathrm{c}}^{\mathrm{in}})^{\top} \tag{7}$$

漂移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表达式为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}
-\kappa_1 & \Delta_1 & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(m_{1\mathrm{s}}) & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(m_{1\mathrm{s}}) & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(a_{2\mathrm{s}}) & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(a_{2\mathrm{s}}) & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\Delta_1 & -\kappa_1 & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(m_{1\mathrm{s}}) & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(m_{1\mathrm{s}}) & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(a_{2\mathrm{s}}) & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(a_{2\mathrm{s}}) & 0 & 0 & 0 & 0\\
-g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(m_{1\mathrm{s}}) & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(m_{1\mathrm{s}}) & -\kappa_2 & \Delta_2 & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(a_{1\mathrm{s}}) & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(a_{1\mathrm{s}}) & 0 & 0 & 0 & 0\\
-g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}((m_{1\mathrm{s}}) & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(m_{1\mathrm{s}}) & -\Delta_2 & -\kappa_2 & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(a_{1\mathrm{s}}) & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(a_{1\mathrm{s}}) & 0 & 0 & 0 & 0\\
-g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(a_{2\mathrm{s}}) & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(a_{2\mathrm{s}}) & g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(a_{1\mathrm{s}}) & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(a_{1\mathrm{s}}) & -\gamma_1 & \Delta_{\mathrm{m1}} & 0 & 0 & 0 & g_{\mathrm{c1}}\\
-g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(a_{2\mathrm{s}}) & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(a_{2\mathrm{s}}) & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Re}(a_{1\mathrm{s}}) & -g_{\mathrm{ma}}\,\mathrm{Im}(a_{1\mathrm{s}}) & -\Delta_{\mathrm{m1}} & -\gamma_1 & 0 & 0 & -g_{\mathrm{c1}} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 & \Delta_{\mathrm{m2}} & 0 & g_{\mathrm{c2}}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta_{\mathrm{m2}} & -\gamma_2 & -g_{\mathrm{c2}} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{\mathrm{c1}} & 0 & g_{\mathrm{c2}} & -\kappa_{\mathrm{c}} & \Delta_{\mathrm{c}}\\
0 & 0 & 0 & 0 & -g_{\mathrm{c1}} & 0 & -g_{\mathrm{c2}} & 0 & -\Delta_{\mathrm{c}} & -\kappa_{\mathrm{c}}
\end{bmatrix} \tag{8}$$

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的本征值的实部均为负数时，系统处于稳定状态。由于输入噪声的高斯特性及线性化朗之万方程的作用，系统涨落的稳态表现为一个五模高斯态，其特征可由一个 10×10 的协方差矩阵 $\boldsymbol{V}$ 描述。

$\boldsymbol{V}$ 的矩阵元定义为 $\boldsymbol{V}_{ij}=\left\langle \boldsymbol{u}_i(t)\boldsymbol{u}_j(t')+\boldsymbol{u}_j(t')\boldsymbol{u}_i(t)/2\right\rangle$，$(i,j=1,2,\cdots,10)$。$\boldsymbol{V}$ 可以通过求解李雅普诺夫方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{\top}=-\boldsymbol{D}$ 获得。根据噪声关联函数可以求解出扩散矩阵 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{D}_{ij}\delta(t-t')=\left\langle \boldsymbol{n}_i(t)\boldsymbol{n}_j(t')+\boldsymbol{n}_j(t')\boldsymbol{n}_i(t)\right\rangle/2$。在本系统中，$\boldsymbol{D}$ 如式(9)所示，其中，$N_j=\{\exp[\hbar\omega_j/(\kappa_B T)]-1\}^{-1}$，$j\in\{1,2,m_1,m_2,c\}$。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}[&\kappa_1(2N_1+1),\kappa_1(2N_1+1),\kappa_2(2N_2+1),\\&\kappa_2(2N_2+1),\gamma_1(2N_{\mathrm{m1}}+1),\gamma_1(2N_{\mathrm{m1}}+1),\gamma_2(2N_{\mathrm{m2}}+1),\\&\gamma_2(2N_{\mathrm{m2}}+1),\kappa_{\mathrm{c}}(2N_{\mathrm{c}}+1),\kappa_{\mathrm{c}}(2N_{\mathrm{c}}+1)]\end{aligned} \tag{9}$$

2　系统中的两体和三体纠缠

采用 Logarithmic Negativity[28-29] 来量化两体纠缠，Logarithmic Negativity 的定义为

$$E\equiv\max[0,-\ln 2\upsilon] \tag{10}$$

式中：E 为对数负性(Logarithmic Negativity)；$\upsilon=\min\mathrm{eig}|\mathrm{i}\varsigma_2\tilde{\boldsymbol{v}}_4|$，是部分转置协方差矩阵的最小辛本征值，当 $\upsilon<1/2$ 时，对应的模式间存在两体纠缠。矩阵 ς_2 是两个 $\mathrm{i}\sigma_y$ 的直和，即 $\varsigma_2=\oplus_{j=1}^{2}i\sigma_y$，$\sigma_y$ 为 y 方向泡利矩阵。矩阵 $\tilde{\boldsymbol{v}}_4=\boldsymbol{P}_{1|2}\boldsymbol{v}_4\boldsymbol{P}_{1|2}$，其中 $\boldsymbol{v}_4$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个 4×4 子矩阵，$\boldsymbol{v}_4$ 仅与两个目标模式相关，$\boldsymbol{P}_{1|2}=\mathrm{diag}(1,-1,1,1)$[30]。

在三体纠缠量判据中，Residual Tangle 更适用于离散量子比特系统，三方对称 Negativity 虽可同时应用于离散和连续变量系统，但对高斯态的敏感度不如 Residual Contangle。由于本文研究的三体纠缠是连续变量系统中的三模高斯态纠缠，因此选择与之契合度更高的、专为连续变量设计的、通过协方差矩阵解析计算的 Residual Contangle 作为三体纠缠判据。用于量化三体纠缠的最小 Residual Contangle[18,31-32] 的定义为

$$\mathcal{R}_{\tau}^{\min\,xyz}\equiv\min[\mathcal{R}_{\tau}^{x|yz},\mathcal{R}_{\tau}^{y|xz},\mathcal{R}_{\tau}^{z|xy}] \tag{11}$$

式中：$(x,y,z)\in\{a_1,a_2,m_1,m_2,c\}$。单个模式对比两个模式的 Residual Contangle 定义为 $\mathcal{R}_{\tau}^{x|yz}\equiv C_{x|yz}-C_{x|y}-C_{x|z}$，$C_{u|v}$（$u$ 包含一个模式，v 包含一个或两个模式）是 Logarithmic Negativity 的平方。如果 v 包含两个模式，在计算 Logarithmic Negativity 时，需要将式(10)中的 ς_2 替换成 ς_3，将 $\boldsymbol{P}_{1|2}$ 替换成 $\{\boldsymbol{P}_{1|23},\boldsymbol{P}_{2|13},\boldsymbol{P}_{3|12}\}$ 其中之一，且 $\upsilon=\min\mathrm{eig}|i\varsigma_3\tilde{\boldsymbol{v}}_6|$，$\varsigma_3=\oplus_{j=1}^{3}i\sigma_y$，$\boldsymbol{P}_{1|23}=\sigma_z\oplus1\oplus1$，$\boldsymbol{P}_{2|13}=1\oplus\sigma_z\oplus1$，$\boldsymbol{P}_{3|12}=1\oplus1\oplus\sigma_z$，$\sigma_z$ 为 z 方向泡利矩阵。

以下对不同子系统的 Logarithmic Negativity 和最小 Residual Contangle 的描述中，用 E 和 $\mathcal{R}_{\tau}^{\min}$ 的下标区分不同的模式，具体为：放在前面的单独的 1 或 2 表示第 1 个或第 2 个光学模式，而 m1 和 m2 分别表示 YIG1 和 YIG2 中的磁振子模式，c 表示微波模式。

图 2 展示了 $E_{2\mathrm{m1}}$，E_{m1m2} 以及 E_{m1c} 随失谐量 $\Delta_1/\omega_{\mathrm{m1}}$ 的变化。其中，$E_{2\mathrm{m1}}$ 表示系统中的第 2 个光学模式(WGM 中的 TE 光学模式)与 YIG1 中的磁振子模式之间的纠缠量，E_{m1m2} 表示 YIG1 和 YIG2 中磁振子模式之间的纠缠量，E_{m1c} 表示 YIG1 中的磁振子

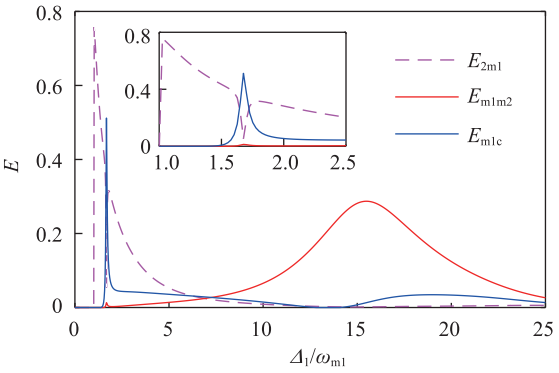
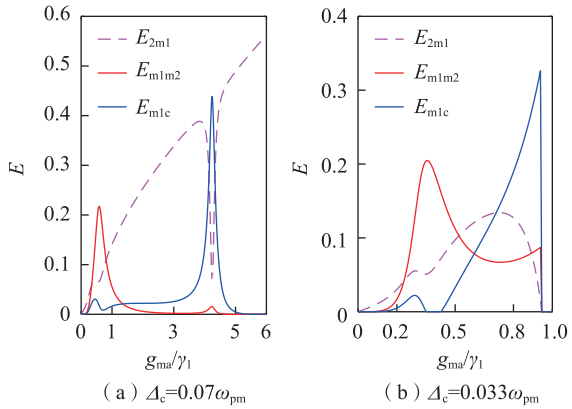


图2　E_{2m1}，E_{m1m2} 以及 E_{m1c} 随失谐量 Δ_1/ω_{m1} 的变化

Fig. 2　E_{2m1}, E_{m1m2} and E_{m1c} versus detuning Δ_1/ω_{m1}

模式与微波模式之间的纠缠量。数值仿真参数取值为：$\Delta_{m1}=0$，$\Delta_{m2}=0.007\omega_{pm}$，$\Delta_c=0.081\omega_{pm}$，$g_{c1}=0.01\omega_{m1}$，$g_{c2}=0.01\omega_{m2}$，$g_{ma}=0.01\omega_{m1}$，$\kappa_1=\kappa_2=0.001\omega_{m1}$，$\kappa_c=0.001\omega_c$，$\gamma_1=0.001\omega_{m1}$，$\gamma_2=0.001\omega_{m2}$；光学泵浦频率 $\omega_p/2\pi=200$ THz，微波驱动频率 $\omega_{pm}/2\pi=5$ GHz，光学驱动功率 $P_1=5$ mW，微波驱动功率 $P_m=5$ nW，环境温度 $T=10$ mK。如图2所示，当 $\Delta_1>0$ 时，系统处于稳定状态，可以得到有效的光学–磁振子模式、磁振子–磁振子模式以及磁振子–微波模式等两体纠缠。其中的光学–磁振子模式的最大纠缠值出现在 $\Delta_1\approx\omega_{m1}$ 处，即 WGM 中的 TM 光学模式与蓝失谐边带共振处。随着 Δ_1 逐渐增大，E_{2m1} 逐渐减小，并在 $\Delta_1\approx1.68\omega_{m1}$ 处达到局部最小值，而与之相反的是，E_{m1c} 逐渐增大，并在相同点处（$\Delta_1\approx1.68\omega_{m1}$）达到最大。$\Delta_1$ 继续增大，随着 E_{m1c} 逐渐减弱，E_{2m1} 逐渐恢复。在 $\Delta_1\approx15\omega_{m1}$ 处，E_{m1m2} 达到最大，而 E_{2m1} 和 E_{m1c} 均趋近于0。图2表明，随着 Δ_1 的逐渐增加，可以依次得到光学–磁振子模式、磁振子–微波模式和磁振子–磁振子模式纠缠，它们在不同的 Δ_1 处取得最大值。这意味着由光磁相互作用产生的原始纠缠 E_{2m1} 可以通过调节光学失谐量转换为 E_{m1c} 和 E_{m1m2}。并且，借助磁振子与微波模式之间的交换相互作用，可实现无直接相互作用的两个 YIG 小球中磁振子模式之间的纠缠。在这些纠缠关系中，YIG1 中的磁振子相当于一个中心节点，通过调节 Δ_1，其纠缠对象可以在光学、磁振子、微波模式之间进行切换。

E_{2m1}，E_{m1m2} 以及 E_{m1c} 随 g_{ma}/γ_1 的变化如图3所示，其中，$\Delta_1=\omega_{m1}$，Δ_c 在图3(a)和图3(b)中的取值



（a）$\Delta_c=0.07\omega_{pm}$　（b）$\Delta_c=0.033\omega_{pm}$

图3　E_{2m1}，E_{m1m2} 以及 E_{m1c} 随耦合强度 g_{ma}/γ_1 的变化

Fig. 3　E_{2m1}, E_{m1m2} and E_{m1c} versus coupling strength g_{ma}/γ_1

分别为 $0.07\omega_{pm}$ 和 $0.033\omega_{pm}$，其他仿真参数与图2相同。从图3可知，当 g_{ma} 与 γ_1 的数量级相当时，不仅可以得到光学–磁振子模式、磁振子–磁振子模式以及磁振子–微波模式之间的纠缠，还可以通过调节 g_{ma}，实现这三类纠缠之间的纠缠转移。当微波模式的失谐量 Δ_c 从图3(a)的 $0.07\omega_{pm}$ 调节到图3(b)的 $0.033\omega_{pm}$ 后，在 g_{ma} 小于 YIG1 中磁振子的耗散率的条件下，系统依然具有有效的两体纠缠。

将磁振子模式的失谐量和微波模式的失谐量调节至 $\Delta_{m1}=\omega_{pm}$，$\Delta_{m2}=0$，$\Delta_c=0.09\omega_{pm}$，并将驱动功率调整为 $P_1=10$ μW，$P_m=50$ pW，可以得到另三对有效纠缠：光学–光学模式（E_{12}）、光学–磁振子模式（E_{2m1}）和光学–微波模式（E_{2c}）纠缠。如图4所示，E_{2m1} 的第1个局部极小值与 E_{12} 的最大值同时出现在 $\Delta_1\approx0.26\omega_{m1}$ 处，而 E_{2m1} 的第2个局部极小值与 E_{2c} 的最大值对应，均出现在 $\Delta_1\approx0.46\omega_{m1}$ 处。

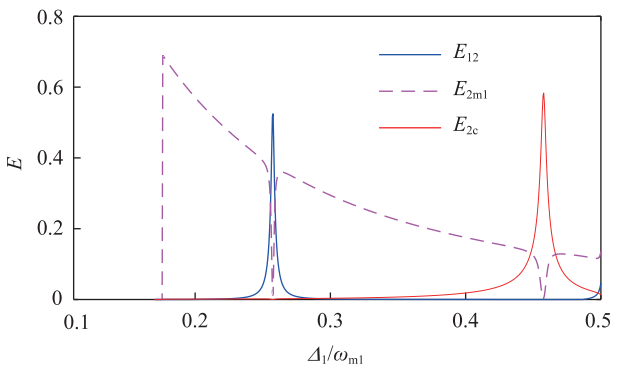


图4　E_{12}，E_{2m1} 以及 E_{2c} 随失谐量 Δ_1/ω_{m1} 的变化

Fig. 4　E_{12}, E_{2m1} and E_{2c} versus detuning Δ_1/ω_{m1}

图4表明，通过调节系统仿真参数，可以在没有直接相互作用的光学模式与微波模式之间产生纠缠。同时，E_{12}，E_{2m1} 和 E_{2c} 均与第2个光学模式相关，通过调节失谐量 Δ_1，可以根据需要将第2个光学模式的纠缠对象在第1个光学模式、YIG1中的磁振子模式以及微波模式之间进行切换，从而实现纠缠在不同物理子系统之间的灵活转移。

在稳定条件下，系统还可以产生三体纠缠。图5展示了在不同驱动功率下最小剩余纠缠度（Residual Contangle）随 Δ_1/ω_{m1} 的变化，其中，$\Delta_{m1}=0.003\omega_{pm}$，$\Delta_{m2}=0.02\omega_{pm}$，$\Delta_c=0.045\omega_{pm}$，其他仿真参数与图2相同。$\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1m2}$，$\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1c}$ 和 $\mathcal{R}^{min}_{\tau m1m2c}$ 分别对应于光学–磁振子–磁振子模式、光学–磁振子–微波模式和磁振子–磁振子–微波模式的三体纠缠量。图5表明，通过调节驱动功率，可获得不同物理子系统之间的三体纠缠。配合失谐量 Δ_1 的调节，还可以实现这些三体纠缠之间的完美转移。例如在图5（c）中，当驱动功率 $P_1=0.55$ mW，$P_m=1.1$ nW 时，将 Δ_1 从 $0.9\omega_{m1}$ 调节到 $1.9\omega_{m1}$，可以实现从光学–磁振子–微波模式三体纠缠到磁振子–磁振子–微波模式三体纠缠的完美转移，即在这个过程中，$\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1c}$ 从最大值逐渐减小到趋近于0，而 $\mathcal{R}^{min}_{\tau m1m2c}$ 则从趋近于0逐渐增大到最大值。

系统中的纠缠随环境温度的变化如图6所示。图6（a）中 E_{12}、E_{2c}、E_{2m1}、E_{m1c}、E_{m1m2} 对应的 Δ_1 取值分别为 $0.257\omega_{m1}$、$0.457\omega_{m1}$、$1.03\omega_{m1}$、$1.67\omega_{m1}$、$15.49\omega_{m1}$。E_{2m1}，E_{m1c} 以及 E_{m1m2} 的其他仿真参数取值与图2相同，E_{12} 和 E_{2c} 的其他仿真参数与图4相同。图6（b）中 $\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1c}$、$\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1m2}$、$\mathcal{R}^{min}_{\tau m1m2c}$ 对应的 Δ_1 取值分别为 $0.9\omega_{m1}$、$1.56\omega_{m1}$、$1.86\omega_{m1}$，其他仿真参数与图5（c）相同。如图6所示，系统中的两体纠缠与三体纠缠在环境温度大于100 mK时依然存在，对热噪声均具有鲁棒性。从图6（a）可知，在系统产生的两体纠缠中，磁振子–磁振子模式之间的纠缠对环境热噪声最为敏感，仅能在低于200 mK的环境温度下获得，而光学–光学模式之间的纠缠对热噪声的鲁棒性最强，在环境温度大于2 K时依然存在。

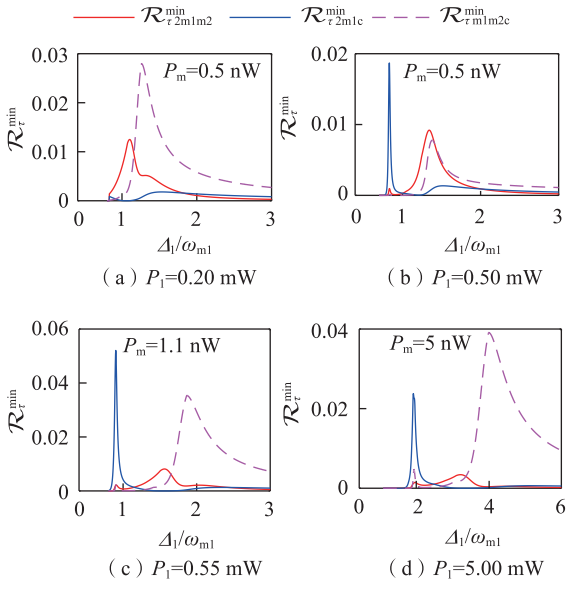
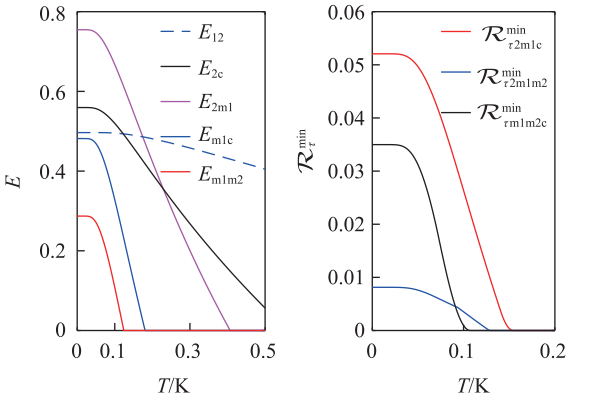


图5　$\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1m2}$，$\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1c}$ 以及 $\mathcal{R}^{min}_{\tau m1m2c}$ 随失谐量 Δ_1/ω_{m1} 的变化

Fig. 5　$\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1m2}$，$\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1c}$ and $\mathcal{R}^{min}_{\tau m1m2c}$ versus detuning Δ_1/ω_{m1}



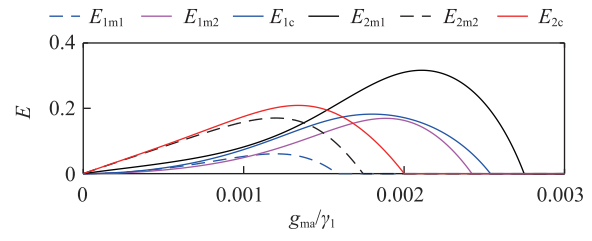
（a）两体纠缠随温度的变化　　（b）三体纠缠随温度的变化

图6　两体和三体纠缠随温度的变化

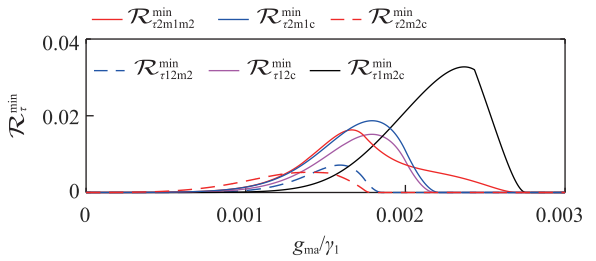
Fig. 6　Bipartite and tripartite entanglement versus temperature

3　讨论

尽管目前在实验上获得的光磁耦合强度远小于光子和磁振子的耗散率，处于弱耦合范围，然而通过优化系统仿真参数并结合新型材料，光磁耦合强度是可以获得显著增强的。图7展示了在弱光磁耦合强度下，系统依然可以获得丰富的两体和三体纠缠，其中 $\Delta_{m1}=\Delta_{m2}=\Delta_c=0$，$\Delta_1=0.01\omega_{m1}$，$P_1=0.2$ mW，$P_m=0.5$ nW，其他仿真参数与图5相同。如图7所示，在 g_{ma} 远小于 γ_1 前提下，依然可以获得光学–微波模式纠缠（量化为 E_{1c} 和 E_{2c}）以及光学–磁振子–微波模式三体纠缠（量化为 $\mathcal{R}^{min}_{\tau 2m1c}$ 和 $\mathcal{R}^{min}_{\tau 1m2c}$）。因此，通过调节各模式的失谐量，配合相应的驱动功率，系统在弱光磁耦合强度条件下仍可获得无直接相互作用的光学模式与微波模式间的



（a）两体纠缠随g_{ma}/γ_1的变化



（b）三体纠缠随g_{ma}/γ_1的变化

图7 弱耦合条件下两体和三体纠缠随g_{ma}/γ_1的变化

Fig. 7 Bipartite and tripartite entanglement versus g_{ma}/γ_1 under weak coupling conditions

纠缠。

为了获得良好的纠缠转移，图2~图5采用了中等强度的光磁耦合。在腔光磁系统中，光磁耦合强度系数由$g_{ma}=Vc'\sqrt{2/N_{spin}}$给出[9]。其中：$V$为费尔德常数；$c'$为光在材料内部的传播速度；$N_{spin}$为样品中的自旋数目，与样品的体积成正比。因此可以通过减小样品的体积或选择具有更大费尔德常数的材料来提升光磁耦合强度的量级。另外，通过采用磁化的ENZ(epsilon-near-zero)介质，理论预测表明，在较小的磁体积和完美的模式重叠条件下，单磁振子-单光子的耦合强度可达到与磁振子频率相当的量级，从而实现单磁振子-单光子的强耦合机制[33]。

与之前的研究相比，文献[14]基于两个磁振子模式与同一个微波腔模式相互作用的结构，研究了磁振子-磁振子和磁振子-微波光子两体纠缠。文献[15]基于一个磁振子模式与两个微波模式相互作用的结构，研究了磁振子-微波光子以及微波光子-微波光子两体纠缠。文献[14-15]的纠缠主要源自YIG材料中磁晶各向异性引起的克尔非线性效应，本系统采用直径为250 μm的YIG小球，其克尔系数$K/2\pi\approx6.4\times10^{-9}$ Hz[18,34-35]，且满足$K|O_s|^3\ll\varepsilon_m$，因此，在本系统中，克尔非线性效应可忽略不计。此外，文献[14-15,18]均未涉及光学光子。本文基于磁振子与自旋轨道耦合的光学光子之间的三模共振相互作用，研究了光学控制的光学-微波模式、磁振子-磁振子模式、磁振子-微波模式、光学-光学模式等两体纠缠及相应的三体纠缠，并着重研究了不同物理子系统之间的纠缠转移控制。其潜在应用场景包括以下三个方面。① 实现量子网络的跨频段互联。光学光子适合长距离传输，而微波光子与超导量子比特能很好地兼容。通过光学-微波纠缠，可构建混合量子网络，将超导量子处理器与光纤通信网络连接起来；通过磁振子中介，可实现光学-微波量子态转换，用于远距离量子通信与分布式量子计算。② 扩展量子传感能力，实现多频段探测。微波光子擅长与固态系统相互作用，而光学光子适合高精度光学测量。通过纠缠光学光子和微波光子，可开发新型跨频段量子传感器，例如同时探测微波频段的磁共振信号和光学频段的光学响应，提升灵敏度或分辨率。③ 量子存储与频率转换。磁振子具有较长的相干时间，可存储量子态，再通过光学或微波读取，实现量子信息的暂存与转换。

4 结论

基于腔光磁系统，结合中等强度光磁三模共振耦合和微波磁振子强耦合条件，本文提出了一种产生两体和三体纠缠及控制纠缠转移的方案。该系统不仅可在没有直接相互作用的两个YIG小球的磁振子模式之间产生纠缠，还可产生光学模式与微波模式之间的纠缠。通过调节光学失谐量或光磁耦合强度，可实现光学-磁振子模式、磁振子-磁振子模式以及磁振子-微波模式纠缠之间的转移，从而灵活切换磁振子模式的纠缠对象。同样，在两体纠缠中，光学模式的纠缠对象也可在光学模式、磁振子模式及微波模式之间切换，从而实现光学-光学模式、光学-磁振子模式以及光学-微波模式纠缠之间的完美转移。此外，光学-磁振子-磁振子模式、光学-磁振子-微波模式以及磁振子-磁振子-微波模式等三体纠缠也能通过调节失谐量和驱动功率进行灵活控制和转移。这为实现纠缠控制提供了一种新途径，可用于量子计算和量子网络中基于纠缠的应用。

参考文献：

[1] Serga A A, Chumak A V, Hillebrands B. YIG magnonics

[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2010, 43(26): 264002.

[2] Chumak A V, Vasyuchka V I, Serga A A, et al. Magnon spintronics[J]. Nature Physics, 2015, 11(6): 453-461.

[3] Huebl H, Zollitsch C W, Lotze J, et al. High cooperativity in coupled microwave resonator ferrimagnetic insulator hybrids[J]. Physical Review Letters, 2013, 111(12): 127003.

[4] Tabuchi Y, Ishino S, Ishikawa T, et al. Hybridizing ferromagnetic magnons and microwave photons in the quantum limit[J]. Physical Review Letters, 2014, 113(8): 083603.

[5] Li Yi, Polakovic T, Wang Yonglei, et al. Strong coupling between magnons and microwave photons in on-chip ferromagnet-superconductor thin-film devices[J]. Physical Review Letters, 2019, 123(10): 107701.

[6] Hou J T, Liu Luqiao. Strong coupling between microwave photons and nanomagnet magnons[J]. Physical Review Letters, 2019, 123(10): 107702.

[7] Zhang Xufeng, Zou Changling, Jiang Liang, et al. Cavity magnomechanics[J]. Science Advances, 2016, 2(3): e1501286.

[8] Tabuchi Y, Ishino S, Noguchi A, et al. Coherent coupling between a ferromagnetic magnon and a superconducting qubit[J]. Science, 2015, 349(6246): 405-408.

[9] Osada A, Hisatomi R, Noguchi A, et al. Cavity optomagnonics with spin-orbit coupled photons[J]. Physical Review Letters, 2016, 116(22): 223601.

[10] Hisatomi R, Osada A, Tabuchi Y, et al. Bidirectional conversion between microwave and light via ferromagnetic magnons[J]. Physical Review B, 2016, 93(17): 174427.

[11] Cai Qizhi, Liao Jinkun, Shen Bohai, et al. Microwave quantum illumination via cavity magnonics[J]. Physical Review A, 2021, 103(5): 052419.

[12] Zhu Na, Zhang Xufeng, Han Xu, et al. Waveguide cavity optomagnonics for microwave-to-optics conversion[J]. Optica, 2020, 7(10): 1291.

[13] Wu Weijiang, Wang Yipu, Li Jie, et al. Microwave-to-optics conversion using magnetostatic modes and a tunable optical cavity[J]. Laser & Photonics Reviews, 2025, 19(2): 2400648.

[14] Zhang Zhedong, Scully M O, Agarwal G S. Quantum entanglement between two magnon modes via Kerr nonlinearity driven far from equilibrium[J]. Physical Review Research, 2019, 1(2): 023021.

[15] Yang Zhibo, Liu Jinsong, Jin Hua, et al. Entanglement enhanced by Kerr nonlinearity in a cavity-optomagnonics system[J]. Optics Express, 2020, 28(21): 31862.

[16] Nair J M P, Agarwal G S. Deterministic quantum entanglement between macroscopic ferrite samples[J]. Applied Physics Letters, 2020, 117(8): 084001.

[17] Kong Deyi, Hu Xiangming, Hu Liang, et al. Magnon-atom interaction via dispersive cavities: magnon entanglement[J]. Physical Review B, 2021, 103(22): 224416.

[18] Li Jie, Zhu Shiyao, Agarwal G S. Magnon-photon-phonon entanglement in cavity magnomechanics[J]. Physical Review Letters, 2018, 121(20): 203601.

[19] Azuma K, Economou S E, Elkouss D, et al. Quantum repeaters: from quantum networks to the quantum internet[J]. Reviews of Modern Physics, 2023, 95(4): 045006.

[20] Bai Chenghua, Wang Dongyang, Wang Hongfu, et al. Robust entanglement between a movable mirror and atomic ensemble and entanglement transfer in coupled optomechanical system[J]. Scientific Reports, 2016, 6: 33404.

[21] Zhang Qiankun, Zhang Xiangyang, Liu Lianzhen. Transfer and preservation of entanglement in a hybrid optomechanical system[J]. Physical Review A, 2017, 96(4): 042320.

[22] Chen Yaotong, Du Lei, Zhang Yan, et al. Perfect transfer of enhanced entanglement and asymmetric steering in a cavity-magnomechanical system[J]. Physical Review A, 2021, 103(5): 053712.

[23] Fan Zhiyuan, Qian Hang, Li Jie. Stationary optomagnonic entanglement and magnon-to-optics quantum state transfer via opto-magnomechanics[J]. Quantum Science and Technology, 2023, 8(1): 015014.

[24] Aiyejina A, Wyke E, Andrews R, et al. Perfect state transfer and maximal entanglement in a trimer of three-level systems[J]. Physical Review A, 2023, 108(3): 032421.

[25] Dutta S. Quantum routing in planar graph using perfect state transfer[J]. Quantum Information Processing, 2023, 22(10): 383.

[26] Haigh J A, Nunnenkamp A, Ramsay A J, et al. Triple-resonant Brillouin light scattering in magneto-optical cavities[J]. Physical Review Letters, 2016, 117(13): 133602.

[27] Liang Zhu, Li Jiahua, Wu Ying. All-optical polarization-state engineering in quantum cavity optomagnonics[J]. Physical Review A, 2023, 107(3): 033701.
[28] Vidal G, Werner R F. Computable measure of entanglement[J]. Physical Review A, 2002, 65(3): 032314.
[29] Plenio M B. Logarithmic negativity: a full entanglement monotone that is not convex[J]. Physical Review Letters, 2005, 95(9): 090503.
[30] Simon R. Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems[J]. Physical Review Letters, 2000, 84(12): 2726-2729.
[31] Adesso G, Illuminati F. Continuous variable tangle, monogamy inequality, and entanglement sharing in Gaussian states of continuous variable systems[J]. New Journal of Physics, 2006, 8: 15.
[32] Jiao Yafeng, Zuo Yunlan, Wang Yan, et al. Tripartite quantum entanglement with squeezed optomechanics [J]. Laser & Photonics Reviews, 2024, 18(12): 2301154.
[33] Bittencourt V A S V, Liberal I, Kusminskiy S V. Optomagnonics in dispersive media: magnon-photon coupling enhancement at the epsilon-near-zero frequency[J]. Physical Review Letters, 2022, 128(18): 183603.
[34] Wang Yipu, Zhang Guoqiang, Zhang Dengke, et al. Magnon Kerr effect in a strongly coupled cavity-magnon system[J]. Physical Review B, 2016, 94(22): 224410.
[35] Zhang Guoqiang, Wang Yipu, You Jianqiang. Theory of the magnon Kerr effect in cavity magnonics[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2019, 62(8): 987511.



第一作者：李明翠(1980—)，女，讲师，博士，研究方向为光量子信息处理。E-mail：cacaony@163.com。



通信作者：陈爱喜(1974—)，男，教授，博士，博士生导师，研究方向为激光物理。E-mail：aixichen@zstu.edu.cn。

(责任编辑：姜红贵)